Exercices — Structures algébriques

Chapitre 10

Exercice 1. Pour chaque ensemble et loi, vérifier les propriétés (associativité, commutativité, neutre, inverses) :
1. $(\mathbb{N}, +)$;
2. $(\mathbb{Z}, \times)$;
3. $(\mathbb{Z}^*, \times)$;
4. $(\mathbb{R}, *)$ avec $x * y = x + y + xy$.

Exercice 2. Démontrer que $(\{-1, 1\}, \times)$ est un groupe.

Exercice 3. Démontrer que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe et que $2\mathbb{Z}$ en est un sous-groupe.

Exercice 4. Démontrer que l'ensemble des rotations du plan de même centre forme un groupe (avec la composition).

Exercice 5. Soit $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \times)$ défini par $f(x) = e^x$. Démontrer que f est un morphisme. Est-il injectif ? Surjectif ?

Exercice 6. Soit f défini sur le groupe des matrices 2×2 inversibles (avec la multiplication) vers $(\mathbb{R}^*, \times)$ par $f(A) = \det(A)$. Démontrer que f est un morphisme. (On admettra $\det(AB) = \det A \times \det B$.)

Exercice 7. Soit G un groupe. Démontrer que l'élément neutre est unique et que tout élément a un unique symétrique.

Exercice 8. Dans un groupe $(G, *)$, démontrer que pour tous $a, b \in G$: $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

Exercice 9. Démontrer que $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n}\mathbb{Z}, +, \times\right)$ (les entiers modulo n) est un corps ssi n est premier.