

# Corrigés — Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

## Chapitre 9

### Solution 1.

- $21 = 15 + 6$  ;  $15 = 2 \times 6 + 3$  ;  $6 = 2 \times 3 + 0$ . PGCD = 3. Remonter :  $3 = 15 - 2 \times 6 = 15 - 2(21 - 15) = 3 \times 15 - 2 \times 21$ . Bézout :  $u = -2, v = 3$ .
- $54 = 2 \times 24 + 6$  ;  $24 = 4 \times 6 + 0$ . PGCD = 6.  $6 = 54 - 2 \times 24$ .  $u = 1, v = -2$ .

### Solution 2.

- $7 \times (-1) + 4 \times 2 = 1$ . Solution particulière  $(-1, 2)$ . Général :  $x = -1 + 4k, y = 2 - 7k$ .
- PGCD(15, 10) = 5 | 20. Simplifier :  $3x + 2y = 4$ .  $3 \times 2 + 2 \times (-1) = 4$ . Général :  $x = 2 + 2k, y = -1 - 3k$ .
- PGCD(3, 5) = 1 | 7.  $3 \times (-1) + 5 \times 2 = 7$ . Général :  $x = -1 + 5k, y = 2 - 3k$ ... non,  $x = -1 + 5\frac{k}{1} = -1 + 5k$  et  $y = 2 - 3k$ .

### Solution 3.

Par Fermat ( $p = 11$ ) :  $a^{\{10\}} \equiv 1 \pmod{11}$  pour  $a$  premier avec 11.

- $2^{\{10\}} \equiv 1$ .
- $3^{\{11\}} = 3 \times 3^{\{10\}} \equiv 3 \times 1 = 3$ .
- $5^{\{20\}} = (5^{\{10\}})^2 \equiv 1^2 = 1$ .

### Solution 4.

Inverse de 4 modulo 13 :  $4 \times 10 = 40 = 3 \times 13 + 1$ , donc  $10$ .  $x \equiv 70 \equiv 5 \pmod{13}$ .

### Solution 5.

$n^3 - n = n(n-1)(n+1)$  : trois entiers consécutifs, donc divisible par 2 et par 3 (trois entiers consécutifs contiennent un multiple de chaque), donc par 6.

### Solution 6.

Fermat pour  $p = 5$  : montrer  $a^5 \equiv a \pmod{5}$ . Récurrence sur  $a \geq 0$  :  $0^5 = 0 \checkmark$ . Hérédité : supposer  $a^5 \equiv a$ . Alors  $(a+1)^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1 \equiv a + 1 \pmod{5}$  (tous les coefficients binomiaux intermédiaires sont multiples de 5). Pour  $a < 0$  : inversion.

### Solution 7.

$2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$ .  $2^{\{100\}} = 2^{3 \times 33 + 1} = (2^3)^{\{33\}} \times 2 \equiv 1^{\{33\}} \times 2 \equiv 2 \pmod{7}$ . Reste : 2.

**Solution 8.**

$17 = 13 + 4$  ;  $13 = 3 \times 4 + 1$  ;  $4 = 4 \times 1$ .  $1 = 13 - 3 \times 4 = 13 - 3(17 - 13) = 4 \times 13 - 3 \times 17$ .  
 $a = 4, b = -3$ . Multiplier par 5 :  $13 \times 20 + 17 \times (-15) = 5$ . Particulière  $(20, -15)$ .

**Solution 9.**

Pour  $8 \mid n^2 - 1$  :  $n = 2k + 1$ ,  $n^2 - 1 = 4k(k + 1)$ , avec  $k(k + 1)$  pair, donc  $8 \mid n^2 - 1$ . Pour  $3 \mid n^2 - 1$  :  $n$  impair. Si  $n \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $n$  divisible par 3 et impair, possible pour  $n = 3$  etc. Alors  $n^2 - 1 \equiv -1$ , non divisible par 3. Contre-exemple :  $n = 3$ ,  $n^2 - 1 = 8$ , non divisible par 24. **L'énoncé est incorrect** : c'est  $24 \mid (n^2 - 1)$  pour  $n$  impair ET non multiple de 3, soit  $n \equiv \pm 1 \pmod{6}$ .