

# Exercices — Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

## Chapitre 9

**Exercice 1.** Trouver Bézout pour :

1. PGCD(21, 15) ;
2. PGCD(54, 24).

**Exercice 2.** Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  :

1.  $7x + 4y = 1$  ;
2.  $15x + 10y = 20$  ;
3.  $3x + 5y = 7$ .

**Exercice 3.** Calculer modulo 11 :  $2^{\{10\}}$ ,  $3^{\{11\}}$ ,  $5^{\{20\}}$ . (Petit théorème de Fermat.)

**Exercice 4.** Résoudre  $4x \equiv 7 \pmod{13}$ .

**Exercice 5.** Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $6 \mid (n^3 - n)$ .

**Exercice 6.** Démontrer le petit théorème de Fermat par récurrence sur  $a$  (cas  $p = 5$ , par exemple).

**Exercice 7.** Déterminer le reste de la division de  $2^{\{100\}}$  par 7.

**Exercice 8.** Soient  $a, b$  des entiers tels que  $13a + 17b = 1$ . Trouver un couple  $(a, b)$ . Puis en déduire une solution particulière de  $13x + 17y = 5$ .

**Exercice 9.** Démontrer que si  $n$  est impair, alors  $24 \mid (n^2 - 1)$  (déjà fait en partie pour 8 ; ajouter le facteur 3).