Calcul intégral

Chapitre 6

Intégrale d'une fonction continue

Définition
Soient f continue sur $[a,b]$ et F une primitive quelconque de f sur cet intervalle. L'*intégrale* de f sur $[a,b]$ est :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

La valeur ne dépend pas du choix de la primitive (constantes se soustraient).

Propriétés

Propriété
Pour f, g continues sur $[a,b]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. **Linéarité** : $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.
2. **Relation de Chasles** : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ pour tout $c \in [a,b]$.
3. **Positivité** : si $f \geq 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f \geq 0$.
4. **Monotonie** : si $f \leq g$ alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
5. $\int_a^a f = 0$; $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Théorème fondamental

Théorème
Soit f continue sur I contenant a. La fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est **la** primitive de f qui s'annule en a. En particulier $F' = f$.

Intégration par parties (IPP)

Théorème
Soient u, v de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple. Calculer $I = \int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$. $u = x, v' = e^x$: $u' = 1, v = e^x$. $I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e - (e-1) = 1$.

Changement de variable (introduction)

En 2e Bac, on utilise surtout les formes reconnaissables : $\int u' f(u)\,\mathrm{d}x = F(u) + c$ où F est primitive de f.

Exemple. $\int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$: $u = x^2, u' = 2x$. Primitive : $e^{x^2} + c$.

Valeur moyenne

Définition
La *valeur moyenne* de f sur $[a, b]$ est :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aire d'une surface

Théorème
L'aire de la surface délimitée par C_f (avec $f \geq 0$), l'axe (Ox) et les droites $x = a$ et $x = b$ vaut $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (unités d'aire). Si f change de signe, découper l'intervalle selon les zéros et sommer les valeurs absolues. L'aire entre deux courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$ (avec $f \geq g$) sur $[a, b]$ vaut $\int_a^b (f-g)\,\mathrm{d}x$.

Exemple. Aire sous $y = x^2$ de 0 à 1 : $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

Volume d'un solide de révolution (introduction)

Propriété
Le volume du solide engendré par la rotation autour de (Ox) de la courbe $y = f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$ est :

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x.$$

Exemple. Volume de la sphère de rayon R : $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ sur $[-R, R]$. $V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) \, \mathrm{d}x = \pi \Big[R^2 x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-R}^{R} = \pi \Big(2R^3 - 2\frac{R^3}{3}\Big) = \frac{4\pi R^3}{3}$.