Corrigés — Suites numériques

Chapitre 3

Solution 1.
1. Dominante $3\frac{n^2}{n^2} = 3$.
2. Conjuguée : $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$.
3. $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \to 0$.
4. $\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \to 0 + 1 = 1$.

Solution 2.
1. $|\cos \frac{n^2}{n}| \leq \frac{1}{n} \to 0$.
2. $\frac{n+(-1)^n}{2n+1}$. Majoré par $\frac{n+1}{2n+1}$, minoré par $\frac{n-1}{2n+1}$, tous deux $\to \frac{1}{2}$. Limite $\frac{1}{2}$.

Solution 3.
$u_n = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \to 2$ quand $n \to +\infty$.

Solution 4.
Croissante : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Majoration : $u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2$. Croissante majorée : converge. (Valeur connue : $\frac{\pi^2}{6}$, hors programme.)

Solution 5.
$u_{n+1} = \frac{3+3}{2} = 3$. Donc si $u_n = 3$ alors $u_{n+1} = 3$. Comme $u_0 = 3$, par vérification immédiate, $u_n = 3$ pour tout n.

Solution 6.
1. $u_1 = 2, u_2 = \frac{5}{2}, u_3 = \frac{11}{4}$.
2. Si $1 \leq u_n \leq 3$, alors $\frac{u_n+3}{2} \in [2,3] \subset [1,3]$. Et $u_0 = 1$ convient. Donc $1 \leq u_n \leq 3$ pour tout n. $u_{n+1} - u_n = \frac{3-u_n}{2} \geq 0$, donc croissante.
3. Convergente (croissante majorée). Limite ℓ : $\ell = \frac{\ell+3}{2} \iff \ell = 3$.

Solution 7.
1. $u_0 = 2 \in [0,2]$. Si $u_n \in [0,2]$ alors $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \in \left[1, \sqrt{3}\right] \subset [0,2]$.
2. $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 1 + u_n - u_n^2 = -(u_n^2 - u_n - 1)$. Signe de $-(u_n - \varphi)(u_n - \varphi')$ où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1\{,\}618$. Pour $u_n > \varphi$, la différence est négative (décroissante). $u_0 = 2 > \varphi$, donc décroissante.
3. Limite ℓ : $\ell = \sqrt{1+\ell}$, $\ell^2 = 1 + \ell$, $\ell = \varphi$ (racine positive). $\boldsymbol{\lim u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Solution 8.
u_n croissante (vers 1), v_n décroissante (vers 1), $u_n < 1 < v_n$ et $v_n - u_n = \frac{2}{n} \to 0$. Adjacentes. Limite commune : 1.

Solution 9.
Résultat admis : $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (définition usuelle).

Solution 10.
Supposons $u_n \to \ell$. Avec $\varepsilon = 1$, il existe N tel que $n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| < 1$. Mais u_n prend alternativement les valeurs 1 et -1 : $|1 - \ell| < 1$ et $|-1 - \ell| < 1$, donc $0 < \ell < 2$ et $-2 < \ell < 0$, contradiction. Pas de limite.