Corrigés — Le produit vectoriel

Chapitre 17

Solution 1.
1. $(0, 0, 1)$ (c'est $\vec{k}$).
2. $(1 \times 3 - (-1) \times 0, (-1) \times 1 - 2 \times 3, 2 \times 0 - 1 \times 1) = (3, -7, -1)$.
3. $\vec{v} = 2\vec{u}$ colinéaires, produit $= \vec{0}$.

Solution 2.
$\overrightarrow{AB}(2, -1, 1), \overrightarrow{AC}(1, 2, 2)$. Produit : $((-1)(2) - 1 \times 2, 1 \times 1 - 2 \times 2, 2 \times 2 - (-1) \times 1) = (-4, -3, 5)$. Norme $= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Aire $= 5\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solution 3.
$\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right] = \det = 2 \times 3 \times 4 = 24$ (matrice diagonale). Volume tétraèdre $= \frac{24}{6} = 4$.

Solution 4.
$\vec{u} \wedge \vec{v} = (2 \times 3 - 0 \times 1, 0 \times 0 - 1 \times 3, 1 \times 1 - 2 \times 0) = (6, -3, 1)$. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 12 + 0 + 1 = 13$. Volume $= |13| = 13$.

Solution 5.
$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \ \|\vec{v}\|^2 \sin^2\theta$ et $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \ \|\vec{v}\|^2 \cos^2\theta$. Somme $= \|\vec{u}\|^2 \ \|\vec{v}\|^2$. D'où Lagrange.

Solution 6.
$\vec{u} \wedge \vec{v} = (-3, 6, -3)$; $\vec{v} \wedge \vec{u} = (3, -6, 3) = -(-3, 6, -3)$. ✓

Solution 7.
$\overrightarrow{AB}(1, 1, -1)$, $\overrightarrow{AC}(-1, 2, 2)$. Produit $(1 \times 2 - (-1)(2), (-1)(-1) - 1 \times 2, 1 \times 2 - 1 \times (-1)) = (4, -1, 3)$. Plan : $4(x - 1) - (y - 0) + 3(z - 1) = 0 \iff 4x - y + 3z - 7 = 0$.

Solution 8.
$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ signifie que l'aire du parallélogramme engendré est nulle, donc les deux vecteurs sont colinéaires. (Ou algébriquement via coordonnées : $y_1 z_2 - z_1 y_2 = 0$, etc., qui caractérise la colinéarité.)

Solution 9.
Exemple : arêtes issues de $(0,0,0)$: $\vec{\imath}(1,0,0)$, $\vec{\jmath}(0,1,0)$. $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} = (0,0,1)$. C'est l'arête verticale du cube. ✓