Le produit vectoriel

Chapitre 17

Définition

Définition
Le *produit vectoriel* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (ou $\vec{u} \times \vec{v}$) de deux vecteurs de l'espace est le vecteur :

- orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;
- de norme $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$;
- de sens donné par la règle de la main droite (orientation directe).

Par convention, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Expression analytique

Théorème
En repère orthonormé direct, si $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2, \quad z_1 x_2 - x_1 z_2, \quad x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Propriétés algébriques

Propriété
1. **Antisymétrie** : $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
2. **Bilinéarité** : $(\vec{u_1} + \vec{u_2}) \wedge \vec{v} = \vec{u_1} \wedge \vec{v} + \vec{u_2} \wedge \vec{v}$, et $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
3. $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
4. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u}, \vec{v}$ colinéaires.
5. Le produit vectoriel n'est **pas** associatif en général.

Applications géométriques

Aire d'un parallélogramme

Théorème
L'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}, \vec{v}$ vaut $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$. L'aire du triangle d'un sommet avec les deux vecteurs adjacents vaut $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\frac{\|}{2}$.

Produit mixte et volume

Définition — Produit mixte
Le *produit mixte* de trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est le scalaire $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$, souvent noté $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ ou $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Théorème
$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ est le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs. Le volume du tétraèdre de même sommet est $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\frac{|}{6}$.

Vecteur normal à un plan

Propriété
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs d'un plan (P), alors $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal à (P).

Ceci donne une méthode directe pour obtenir le vecteur normal à un plan défini par trois points.

Exemples de calcul

Exemple. $\vec{u}(1,2,3), \vec{v}(4,5,6)$: $\vec{u} \wedge \vec{v} = (2 \times 6 - 3 \times 5, 3 \times 4 - 1 \times 6, 1 \times 5 - 2 \times 4) = (-3, 6, -3)$. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \sqrt{9 + 36 + 9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

Exemple. Triangle $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$: $\overrightarrow{AB}(-1,1,0), \overrightarrow{AC}(-1,0,1)$. Produit vectoriel $(1,1,1)$. Aire du triangle : $\|n\frac{\|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.