Corrigés — Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Chapitre 16

Solution 1.

1. $-47 = 5 \times (-10) + 3$, $q = -10, r = 3$.
2. $-100 = (-7) \times 15 + 5$, $q = 15, r = 5$.
3. $2026 = (-13) \times (-156) + -2...$ r doit être ≥ 0, donc $2026 = (-13) \times (-156) + (-2)$ ne marche pas. Reprenons : $2026 = 13 \times 155 + 11 = (-13) \times (-155) + 11$. $q = -155, r = 11$.

Solution 2.

$1071 = 462 \times 2 + 147$. $462 = 147 \times 3 + 21$. $147 = 21 \times 7 + 0$. PGCD $= 21$.

Solution 3.

Euclide : $17 = 13 + 4$. $13 = 4 \times 3 + 1$. Remonter : $1 = 13 - 4 \times 3 = 13 - (17 - 13) \times 3 = 4 \times 13 - 3 \times 17$. Donc $u = 4, v = -3$.

Solution 4.

1. Modulo 5 : n peut valoir $0, 1, 2, 3, 4$. Calculer $n^5 - n$ dans chaque cas, obtenir 0. Ou invoquer le petit théorème de Fermat.
2. $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$: produit de trois entiers consécutifs, l'un est divisible par 3.

Solution 5.

1. $3x \equiv 2 \bmod 7$. Inverse de 3 mod 7 : $3 \times 5 = 15 \equiv 1 \bmod 7$, donc inverse $= 5$. $x \equiv 10 \equiv 3 \bmod 7$.
2. $6x \equiv 4 \bmod 10$. $\mathrm{PGCD}(6, 10) = 2$ divise 4, donc possible. Simplifier par 2 : $3x \equiv 2 \bmod 5$. Inverse de 3 mod 5 : $3 \times 2 = 6 \equiv 1$. $x \equiv 4 \bmod 5$.

Solution 6.

$n(n+1)(2n+1)$: parmi trois facteurs, $n(n+1)$ est pair. Pour 3 : modulo 3, $n, n+1, 2n+1$ couvrent tous les résidus (vérifier cas), donc l'un est divisible par 3. Donc $6 \mid n(n+1)(2n+1)$.

Solution 7.

$n = 2k+1$: $n^2 - 1 = (n-1)(n+1) = 2k \times (2k+2) = 4k(k+1)$. Or $k(k+1)$ est pair. Donc $n^2 - 1 = 8 \times \left(\frac{k(k+1)}{2}\right) \in 8\mathbb{Z}$.

Solution 8.

Solution particulière : $5 \times (-1) + 3 \times 2 = 1$. $x_0 = -1, y_0 = 2$. Solution générale : $x = -1 + 3t, y = 2 - 5t$ pour $t \in \mathbb{Z}$.

Solution 9.
Supposons $p \mid ab$ et p premier avec a. Par Bézout, $up + va = 1$. Multiplier par b : $upb + vab = b$. p divise les deux termes du membre de gauche, donc $p \mid b$.

Solution 10.
Modulo 10 : $7^1 = 7, 7^2 = 49 \equiv 9, 7^3 \equiv 63 \equiv 3, 7^4 \equiv 21 \equiv 1$. Cycle de longueur 4. $2026 = 4 \times 506 + 2$, donc $7^{\{2026\}} \equiv 7^2 \equiv 9 \mod 10$. Dernier chiffre : **9**.