

Exercices — Arithmétique dans \mathbb{Z}

Chapitre 16

Exercice 1. Effectuer la division euclidienne de :

1. -47 par 5 ;
2. -100 par -7 ;
3. 2026 par -13 .

Exercice 2. Calculer $\text{PGCD}(1071, 462)$ par l'algorithme d'Euclide.

Exercice 3. Trouver $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $13u + 17v = 1$ (Bézout).

Exercice 4. Démontrer par congruence :

1. $5 \mid (n^5 - n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $3 \mid (n^3 - n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Résoudre dans \mathbb{Z} :

1. $3x \equiv 2 \pmod{7}$;
2. $6x \equiv 4 \pmod{10}$ (attention : pas toujours simplifiable).

Exercice 6. Démontrer que $n(n+1)\frac{2n+1}{6}$ est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Somme des carrés ; utiliser divisibilité par 6.)

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que si n est impair, alors $8 \mid (n^2 - 1)$.

Indication : écrire $n = 2k + 1$.

Exercice 8. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $5x + 3y = 1$.

Indication : trouver une solution particulière, puis la solution générale via Gauss.

Exercice 9. Démontrer que si p premier et $p \mid ab$ alors $p \mid a$ ou $p \mid b$ (lemme d'Euclide).

Exercice 10. Trouver le dernier chiffre de $7^{\{2026\}}$.

Indication : travailler modulo 10.