Mathématiques · Tronc Commun Scientifique

Corrigés — Produit scalaire dans l'espace

Chapitre 15

Solution 1.

1. $2-2+0=0$. **Orthogonaux**.
2. $0-6+5=-1$.

Solution 2.

$2m+m-2=3m-2=0 \iff m=\frac{2}{3}$.

Solution 3.

$3(x-1)+(y-2)-2(z+1)=0 \iff 3x+y-2z-7=0$.

Solution 4.

1. $\overrightarrow{AB}(-1,1,0), \overrightarrow{AC}(-1,0,1)$. Normale calculée : $(1,1,1)$.
2. $x+y+z=1$.
3. $d(O,P)=|0+0+0-1\frac{|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Solution 5.

$\overrightarrow{BA}(2,1,3)$. Projeté $H=B+s\vec{u}$ avec $s=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}=\frac{6}{3}=2$. $H(2,2,2)$. $\overrightarrow{AH}(0,1,-1)$. $AH=\sqrt{2}$.

Solution 6.

1. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$.
2. $(3)^2+(4)^2+0=25$. **Sur la sphère**.

Solution 7.

$\vec{n}(2,-1,1)$. $H=A+t\vec{n}$ avec $2x_H-y_H+z_H=6$. $H(3+2t,-t,1+t)$. Résoudre : $2(3+2t)-(-t)+1+t=6$, soit $6+5t+1+t=6$, $6t=-1$, $t=-\frac{1}{6}$. Donc $H\left(3-\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{8}{3},\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)$.

Solution 8.

Soit $P(\lambda)=\|\vec{u}-\lambda\vec{v}\|^2=\|\vec{v}\|^2\ \lambda^2-2(\vec{u}\cdot\vec{v})\lambda+\|\vec{u}\|^2\geq 0$ pour tout λ. Discriminant : $\Delta=4(\vec{u}\cdot\vec{v})^2-4\ \|\vec{u}\|^2\ \|\vec{v}\|^2\leq 0$. D'où $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2\leq\|\vec{u}\|^2\ \|\vec{v}\|^2$.

Solution 9.

Soit le plan (P) à distance d du centre Ω. Projeté orthogonal H de Ω sur (P) : $\Omega H=d$. Pour tout M du cercle intersection, $\Omega M = R$ (sphère) et $\overrightarrow{\Omega H} \perp \overrightarrow{HM}$. Pythagore : $HM = \sqrt{R^2 - d^2}$. Donc l'intersection est un cercle de centre H et rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$.