Produit scalaire dans l'espace

Chapitre 15

Définition et expression analytique

Définition
Pour deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de l'espace :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

En repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ avec $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Propriétés

Propriété
1. Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
2. Bilinéarité : $(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v}$; $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
3. Carré scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
4. Orthogonalité : $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
5. Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Vecteur normal à un plan

Définition
Un vecteur $\vec{n}$ est *normal* à un plan (P) s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de (P). En pratique : orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.

Théorème — Équation cartésienne du plan
En repère orthonormé, le plan passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ a pour équation :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

soit $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

Distance d'un point à un plan

Théorème
La distance du point $M(x_M, y_M, z_M)$ au plan $ax + by + cz + d = 0$ (avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$) est :

$$d(M, P) = |ax_M + by_M + cz_M + d\frac{|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Équation d'une sphère

Théorème
La sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et rayon $R > 0$ a pour équation :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

ou après développement $x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ (forme générale, sphère ssi discriminant approprié > 0).

Projection orthogonale

Définition
Le *projeté orthogonal* du point M sur un plan (P) (resp. sur une droite (D)) est le point H de (P) (resp. (D)) tel que $(MH) \perp (P)$ (resp. $(MH) \perp (D)$).

Le projeté sur une droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$:

$$H = A + \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \times \vec{u}.$$

Applications

Exemple. Calcul d'un angle entre un plan et une droite : l'angle est le complément de l'angle entre la droite et le vecteur normal au plan. $\sin\theta = |\vec{u} \cdot \vec{n}\frac{|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{n}\|}$.