Corrigés — Dénombrement

Chapitre 14

Solution 1.
$6! = 720$; $\frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$; $A_{10}^3 = 720$; $\binom{12}{4} = 495$; $\binom{20}{17} = \binom{20}{3} = 1140$.

Solution 2.
1. $A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13 = 2730$.
2. $\binom{15}{3} = 455$.

Solution 3.
$\frac{11!}{2!\times3!\times2!\times1!\times1!\times1!\times1!} = 39,916$, $\frac{800}{24} = 1,663,200$.

Solution 4.
$(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$.

Solution 5.
Coefficient de x^4 dans $(1+x)^{\{10\}}$: $\binom{10}{4} = 210$.

Solution 6.
$(1+1)^n = \sum\binom{n}{k}1^{n-k}1^k = \sum\binom{n}{k} = 2^n$.

Solution 7.
$(1+(-1))^n = 0 = \sum\binom{n}{k}(-1)^k$ pour $n \geq 1$.

Solution 8.
Choisir 2 as parmi 4 : $\binom{4}{2} = 6$. Choisir 3 autres cartes parmi 28 non-as : $\binom{28}{3} = 3276$. Total : $6 \times 3276 = 19,656$.

Solution 9.
1. $A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.
2. Le dernier chiffre est 5. Il reste 3 chiffres distincts à choisir parmi $\{1,2,3,4,6,7\}$ (6 éléments) à placer dans 3 cases : $A_6^3 = 120$.

Solution 10.
Argument combinatoire : dans un groupe de m garçons et n filles, on choisit k personnes.

Soit i le nombre de garçons (de 0 à k). Nombre de façons de choisir i garçons puis $k-i$ filles : $\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$. Sommer sur i. Cela égale le nombre total de comités : $\binom{m+n}{k}$.