# Dénombrement

Chapitre 14

## Principes fondamentaux

**Propriété — Principe multiplicatif (produit)**
Si une procédure se réalise en $k$ étapes successives avec $n_1, n_2, \ldots, n_k$ choix à chaque étape, alors le nombre total d'issues est $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$.

**Propriété — Principe additif**
Si un objet peut être obtenu par $k$ méthodes mutuellement exclusives comptant $n_1, \ldots, n_k$ issues, le total vaut $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

**Exemple.** Codes à 4 chiffres : $10^4 = 10,000$ combinaisons possibles. Codes à 4 chiffres distincts : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5,040$.

## Factorielle, arrangements, combinaisons

**Définition**
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la *factorielle* :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n, \quad 0! = 1.$$

Le nombre de *permutations* de $n$ éléments distincts est $n!$.

**Définition — Arrangements**
Le nombre d'*arrangements* de $k$ parmi $n$ (listes ordonnées sans répétition) est :

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

**Définition — Combinaisons**
Le nombre de *combinaisons* de $k$ parmi $n$ (choix non ordonnés, sans répétition) est :

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}.$$

**Exemple.**
- Comités de 3 personnes choisies parmi 10 : $\binom{10}{3} = 120$.
- Classements (3 places) parmi 10 : $A_{10}^3 = 720$.

## Propriétés des coefficients binomiaux

**Théorème**
Pour tous $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq n$ :
1. Symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. Triangle de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
3. Somme : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Démonstrations : directes par le quotient factoriel pour la symétrie ; le triangle se voit géométriquement dans le tableau et algébriquement ; la somme correspond au cardinal de $P(E)$ pour $|E| = n$.

## Formule du binôme de Newton

**Théorème**
Pour tous $a, b$ (réels ou complexes) et $n \in \mathbb{N}$ :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

*Démonstration.* Raisonnement combinatoire : $(a+b)^n = (a+b)(a+b)...(a+b)$. Développer, c'est choisir dans chaque facteur soit $a$ soit $b$. Le coefficient de $a^{n-k}b^k$ est le nombre de façons de choisir $k$ facteurs donnant $b$ (parmi $n$), soit $\binom{n}{k}$. ∎

**Exemple.** $(x+1)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3 + \binom{4}{2}x^2 + \binom{4}{3}x + \binom{4}{4} = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

## Permutations avec répétition

Le nombre de *mots* (anagrammes) qu'on peut former avec un multi-ensemble $n_1$ $a_1$'s, $n_2$ $a_2$'s, ..., $n_r$ $a_r$'s (avec $n_1 + ... + n_r = n$) est :

$$\frac{n!}{n_{1!} n_{2!} ... n_{r!}}.$$

**Exemple.** Anagrammes de MATHS (5 lettres distinctes) : $5! = 120$. Anagrammes de MATH (4 lettres distinctes) : $4! = 24$. Anagrammes de BANANA (B, 3 A, 2 N) : $\frac{6!}{1!3!2!} = 60$.