

Corrigés — Ensembles et applications

Chapitre 2

Solution 1.

$A \cap B = \{3, 4\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A \setminus B = \{1, 2\}$; $\complement_E A = \{5, 6\}$; $A \times \{0, 1\} = 8$ couples.

Solution 2.

$x \in (A \cap B)^c \iff x \notin A \cap B \iff \neg(x \in A \text{ et } x \in B) \iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \iff x \in A^c \cup B^c$.

Solution 3.

Injective : $2x - 3 = 2x' - 3 \Rightarrow x = x'$. Surjective : pour $y \in \mathbb{R}$, $x = \frac{y+3}{2}$ vérifie $f(x) = y$.
 $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}$.

Solution 4.

$f(x) = \frac{1}{x}$. Injective : $\frac{1}{x} = \frac{1}{x'} \Rightarrow x = x'$. Surjective : $x = \frac{1}{y}$. $f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$ (f est sa propre réciproque).

Solution 5.

1. Injective ($n^2 = m^2$ et $n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow n = m$), non surjective (2 n'est carré d'aucun entier).
2. Bijective.
3. Non injective ($x, -x$), surjective.
4. Non injective : $f(0) = 1, f(1) = 0, f(2) = 3, f(3) = 2, \dots$ ce sont des paires échangées. En fait c'est injectif si les images sont distinctes. Cas par cas : $f(0) = 1, f(1) = 0, f(2) = 3, \dots$ Distinctes, donc injective. Surjective aussi. Bijective.

Solution 6.

1. $y \in f(A_1 \cup A_2) \iff \exists x \in A_1 \cup A_2, y = f(x) \iff (\exists x \in A_1, y = f(x)) \text{ ou } (\exists x \in A_2, y = f(x)) \iff y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.
2. $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \iff f(x) \in B_1 \cap B_2 \iff f(x) \in B_1 \text{ et } f(x) \in B_2 \iff x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Solution 7.

\Rightarrow : f injective. Soit $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$: il existe $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ avec $f(x_1) = f(x_2) = y$. Par injectivité, $x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$, donc $y \in f(A_1 \cap A_2)$. L'autre inclusion est triviale. \Leftarrow : Supposons $f(x) = f(x')$. Posons $A_1 = \{x\}, A_2 = \{x'\}$. Alors $f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x)\} \neq \emptyset$, donc $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, c'est-à-dire $x = x'$.

Solution 8.

$(f \circ g)(x) = f(x^2) = 3x^2 + 1$. $(g \circ f)(x) = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$. Différentes.

Solution 9.

Soient f, g injectives, x, x' tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$. Par injectivité de g , $f(x) = f(x')$. Par injectivité de f , $x = x'$.