Ensembles et applications

Chapitre 2

Ensembles

Définition
Un *ensemble* est une collection d'objets appelés *éléments*. On note $x \in E$ si x est élément de E, $x \notin E$ sinon. Deux ensembles sont *égaux* s'ils ont exactement les mêmes éléments.

Définition — Sous-ensemble
A est *inclus dans* B (ou *sous-ensemble*), noté $A \subseteq B$, si tout élément de A est élément de B. L'ensemble vide $\emptyset$ est sous-ensemble de tout ensemble. L'ensemble des parties de E est noté $P(E)$.

Opérations sur les ensembles

Définition
- *Intersection* : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- *Réunion* : $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- *Différence* : $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$.
- *Complément* (dans un ensemble E) : $\complement_E A = E \setminus A$.
- *Produit cartésien* : $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Propriété — Lois fondamentales
- Commutativité : $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- Associativité.
- Distributivité : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (et symétrique).
- De Morgan : $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$, $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.

Applications

Définition
Une *application* $f : E \to F$ associe à chaque $x \in E$ un unique élément $f(x) \in F$. E est

l'ensemble de *départ*, F d'*arrivée*. Deux applications sont égales si elles ont même départ, même arrivée et mêmes valeurs.

Définition — Injection, surjection, bijection
Soit $f : E \to F$.
- f est *injective* si : $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
- f est *surjective* si : $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.
- f est *bijective* si elle est à la fois injective et surjective.

Exemple.
- $f(x) = x + 3$ sur $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: bijective.
- $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: ni injective ($f(-1) = f(1)$) ni surjective (pas de x avec $f(x) = -1$).
- $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$: bijective.

Image directe, image réciproque

Définition
Soient $f : E \to F$, $A \subseteq E$, $B \subseteq F$.
- Image directe : $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.
- Image réciproque : $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

Attention : f^{-1} dans cette notation ne suppose pas que f est bijective. Si f l'est, alors f^{-1} désigne aussi l'application réciproque.

Composition, application réciproque

Définition
- Composition : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pour $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
- Si $f : E \to F$ est bijective, son *application réciproque* $f^{-1} : F \to E$ est définie par $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$. Elle vérifie $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.

Propriété
Si f, g sont bijectives, $g \circ f$ aussi, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.