

# Exercices — Ensembles et applications

## Chapitre 2

**Exercice 1.** Soient  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ,  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Calculer  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ ,  $\complement_E A$ ,  $A \times \{0, 1\}$ .

**Exercice 2.** Démontrer  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$  (loi de De Morgan) en utilisant la définition.

**Exercice 3.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 3$ . Démontrer que  $f$  est bijective et déterminer  $f^{-1}$ .

**Exercice 4.** Même question pour  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

**Exercice 5.** Étudier l'injectivité, la surjectivité de :

1.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n) = n^2$  ;
2.  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(n) = n + 3$  ;
3.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f(x) = x^2$  ;
4.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $f(n) = n + (-1)^n$ .

**Exercice 6.** Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $A_1, A_2 \subseteq E$ ,  $B_1, B_2 \subseteq F$ . Démontrer :

1.  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$  ;
2.  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ .

**Exercice 7.** Soit  $f : E \rightarrow F$ . Démontrer :  $f$  est injective ssi pour tous  $A_1, A_2 \subseteq E$ ,  $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ .

**Exercice 8.** Soient  $f(x) = 3x + 1$  et  $g(x) = x^2$ . Calculer  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ . Les comparer.

**Exercice 9.** Démontrer que la composée de deux injections est injective.