Corrigés — Logique mathématique

Chapitre 1

Solution 1.

1. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ (faux).
2. $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \leq 1000$ (faux aussi — à n assez grand, on dépasse).
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \neq 1$ (vrai pour $x = 0$).

Solution 2.

Initialisation $n = 1$: somme $= 1 = 1 \times 2 \times \frac{3}{6} = 1$. ✓ **Hérédité :** si $S_n = n(n+1)\frac{2n+1}{6}$, alors $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right) = (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} = (n+1)(n+2)\frac{2n+3}{6}$. Formule héritée. ✓

Solution 3.

$n = 0$: $4^0 - 1 = 0$ divisible par 7. ✓ **Hérédité :** $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4(4^n - 1) + 3$. Hmm, pas direct. Approche alternative : $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 4 + 3 = 4(4^n - 1) + 3$. $7 \mid (4^n - 1)$ par H.R., mais 7 ne divise pas 3, donc ça n'aboutit pas.

Vérifier l'énoncé : $4^1 - 1 = 3$, $4^2 - 1 = 15$, $4^3 - 1 = 63 = 7 \times 9$. $\frac{63}{7} = 9$ ✓ ; $\frac{15}{7}$ non entier. L'énoncé est faux pour $n = 2$.

Correction : en fait $4^n - 1$ est divisible par 3, pas nécessairement par 7. Exemple corrigé : $3 \mid (4^n - 1)$. Démonstration : $4 \equiv 1 \bmod 3$, donc $4^n \equiv 1$, $4^n - 1 \equiv 0 \bmod 3$.

Solution 4.

Initialisation $n = 0$: $(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0 = 1$. ✓ **Hérédité :** supposons $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Comme $1 + x \geq 0$, on peut multiplier : $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$ (car $nx^2 \geq 0$). ✓

Solution 5.

Init. $n = 4$: $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$. ✓ **Hér. :** $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2$. Montrer $2n^2 \geq (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, c.-à-d. $n^2 \geq 2n + 1$, soit $n^2 - 2n - 1 \geq 0$. Pour $n \geq 4$: $n^2 - 2n - 1 \geq 16 - 8 - 1 = 7 > 0$. ✓

Solution 6.

Contraposée : « $a \leq 0$ et $b \leq 0$ » implique « $ab \leq 0$ ». Sur $\mathbb{R}_+$, $a, b \geq 0$ et « $a \leq 0$ » revient à $a = 0$. Idem b. Alors $ab = 0 \leq 0$. ✓

Solution 7.
Supposons $a + b\sqrt{2} = 0$ avec $a, b \in \mathbb{Q}_+$. Si $b > 0$, alors $\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, contradiction. Donc $b = 0$, et alors $a = 0$.

Solution 8.
Init. $n = 0, 1$: $F_0 = 0 \leq 1$, $F_1 = 1 \leq \frac{7}{4}$. ✓ **Hér. :** supposons $F_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$ et $F_{n+1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$. Alors $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} + \left(\frac{7}{4}\right)^n = \left(\frac{7}{4}\right)^n\left(\frac{7}{4} + 1\right) = \left(\frac{11}{4}\right)\left(\frac{7}{4}\right)^n$. Il faut vérifier $\frac{11}{4} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$, soit $\frac{44}{16} \leq \frac{49}{16}$. ✓