Logique mathématique

Chapitre 1

Propositions, connecteurs, quantificateurs

Définition
Une *proposition* est un énoncé qui est soit vrai (V), soit faux (F). Les connecteurs usuels sont $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Longleftrightarrow$. Les quantificateurs sont $\forall$ (pour tout) et $\exists$ (il existe).

Tables de vérité, lois de De Morgan

Propriété
$\neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$; $\neg(P \vee Q) \Longleftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$.

Négation des quantificateurs : $\neg(\forall x, P(x)) \Longleftrightarrow \exists x, \neg P(x)$; $\neg(\exists x, P(x)) \Longleftrightarrow \forall x, \neg P(x)$.

Modes de raisonnement

Les cinq modes : direct, contraposée, absurde, contre-exemple, disjonction de cas — vus en TC puis affinés ici. En 1BAC SM, on ajoute le raisonnement **par récurrence**.

Raisonnement par récurrence

Théorème — Principe de récurrence
Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier n. Si :
1. $P(n_0)$ est vraie (initialisation) ;
2. pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (hérédité),

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple. Démontrer que $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour $n \geq 1$.

Initialisation : pour $n = 1$, la somme vaut $1 = 1 \times \frac{2}{2}$. ✓

Hérédité : supposons la formule vraie au rang n. Alors $1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)((\frac{n}{2}) + 1) = (n+1)\frac{n+2}{2}$. La propriété est héritée.

Par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

Variantes

Récurrence double

Initialisation sur $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$, hérédité de $P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2)$. Utile pour des suites définies par une récurrence à deux termes (Fibonacci).

Récurrence forte

Hérédité : $\forall k \in [n_0, n], P(k)$ implique $P(n+1)$. Plus puissante mais peu utilisée au lycée.

Équivalence et contraposition

Pour démontrer $P \iff Q$, démontrer $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ séparément. Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, on peut aussi démontrer la contraposée $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$.

Exemple. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2 pair ssi n pair. $\Leftarrow$: $n = 2k$ donne $n^2 = 4k^2$ pair. **$\Rightarrow$ par contraposée** : n impair $(n = 2k+1)$ donne $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ impair.