# Exercices — Logique mathématique

Chapitre 1

**Exercice 1.** Donner la négation de :
1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ ;
2. $\exists n \in \mathbb{N}, 2^n > 1000$ ;
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy = 1$.

**Exercice 2.** Démontrer par récurrence : pour tout $n \geq 1$,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)\frac{2n+1}{6}.$$

**Exercice 3.** Démontrer par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$7 \mid (4^n - 1).$$

(Où | signifie « divise ».)

**Exercice 4.** Démontrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli : pour tout $x \geq -1$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

**Exercice 5.** Démontrer : pour tout $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

**Exercice 6.** Démontrer par contraposée : pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$, si $ab > 0$ alors $a > 0$ ou $b > 0$.

**Exercice 7.** Démontrer par l'absurde : si $a, b \in \mathbb{Q}_+$ et $a + b\sqrt{2} = 0$ alors $a = b = 0$.

**Exercice 8.** Démontrer par récurrence double : la suite de Fibonacci vérifie $F_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$ pour tout $n \geq 0$.

*Indication* : initialisation en $n = 0$ et $n = 1$, puis hérédité.