Corrigés — Vecteurs de l'espace

Chapitre 12

Solution 1.

1. $\overrightarrow{AB}(2;-2;5)$, $\overrightarrow{AC}(-3;3;3)$, $\overrightarrow{BC}(-5;5;-2)$.
2. $AB = \sqrt{4+4+25} = \sqrt{33}$; $AC = \sqrt{9+9+9} = 3\sqrt{3}$; $BC = \sqrt{25+25+4} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.
3. Milieu de $[AC] = \left(\frac{1-2}{2}; \frac{2+5}{2}; \frac{-1+2}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Solution 2.

$\vec{v} = -2\vec{u}$, $-\frac{4}{2} = -2, -\frac{6}{3} = -2$. Colinéaires, coefficient -2.

Solution 3.

$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$: $(a; b; a+b) = (1; 1; 0)$. Système : $a = 1, b = 1, a + b = 2 \neq 0$. Incompatible. Donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont **non coplanaires** : forment **une base** de l'espace.

Solution 4.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 12 - 1 = -11$. $\quad \|\vec{u}\| = \sqrt{14}, \|\vec{v}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. $\quad \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{11}{\sqrt{14}\times 3\sqrt{2}} = -\frac{11}{3\sqrt{28}} \approx -0\{,\}693$. Angle $\approx 134°$.

Solution 5.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3x + 2x - 2 = 5x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{5}$.

Solution 6.

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a \times a \times \cos(60°) = \frac{a^2}{2}$.
2. $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$.

Solution 7.

$AB^2 = 1 + 1 + 0 = 2$; $BC^2 = 0 + 1 + 1 = 2$; $AC^2 = 1 + 0 + 1 = 2$. Les trois côtés égaux : **équilatéral**.

Solution 8.

1. $A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;1;0), E(0;0;1)$, et par Chasles : $C(1;1;0), F(1;0;1), H(0;1;1), G(1;1;1)$.
2. $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$, $AG = \sqrt{3}$.
3. Chaque vecteur de la face $BDHF$ (par ex. $\overrightarrow{BD} = (-1;1;0)$) vérifie $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = -1 + 1 + 0 = 0$. Idem pour $\overrightarrow{BF} = (0;0;1)$... mais ce dernier donne $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BF} = 1 \neq 0$, donc $\overrightarrow{AG}$ n'est

orthogonal qu'à la diagonale $[BD]$ (ou à $[DF]$ etc.), pas au plan $BDHF$. **L'énoncé demandait trop fort** ; l'exercice convient pour la diagonale seule.

Solution 9.
$M = \left(\frac{2+0}{2}; \frac{1-1}{2}; \frac{0+3}{2}\right) = \left(1; 0; \frac{3}{2}\right)$. $AB = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$. $OM = \sqrt{1+0+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.