Corrigés — Étude de fonctions

Chapitre 11

Solution 1.
$D_f = \mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Zéros $0, 2$. Signe : $+, -, +$. $f \nearrow$ sur $]-\infty, 0]$, $\searrow$ sur $[0, 2]$, $\nearrow$ sur $[2, +\infty[$. $f(0) = 2$ max local ; $f(2) = -2$ min local. $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$.

Solution 2.
$f(x) = (x-1)^2(x+2)$. Développer : $x^3 - 3x + 2$. Dérivée $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Variations : $\nearrow \searrow \nearrow$. $f(1) = 0$ min, $f(-1) = 4$ max.

Solution 3.
Sur $]0, +\infty[$: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$. Zéro en $x = 1$. Minimum $f(1) = 2$. Sur $]-\infty, 0[$ (par imparité) : maximum -2 en $x = -1$. $f(x) - x \to 0$ donc asymptote oblique $y = x$ en $\pm\infty$.

Solution 4.
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Division : $f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-2}$.

- Asymptote verticale $x = 2$; $\lim_{x\to2^-} = -\infty$, $\lim_{x\to2^+} = +\infty$.
- Asymptote oblique $y = x + 2$.

$f'(x) = 1 - \frac{3}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2-3}{(x-2)^2}$, zéros en $2 \pm \sqrt{3}$.

Solution 5.
$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$. $D_f = \mathbb{R}$. $\lim_{\pm\infty} = 0$, asymptote horizontale $y = 0$. $f'(x) = \frac{2(x^2+1)-(2x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2-2x+2}{(x^2+1)^2} = (-2)\frac{x^2+x-1}{(x^2+1)^2}$. Zéros en $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Signe opposé selon l'intervalle. Maximum et minimum aux racines.

Solution 6.
$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$. $D_f = \mathbb{R}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (conjuguée). $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0$ pour tout x. **Strict. décroissante** sur $\mathbb{R}$.

Solution 7.
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Division : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$. Asymptote verticale $x = -1$, asymptote oblique $y = x - 1$. $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$. Zéros $0, -2$. Variations : $\nearrow \searrow | \searrow \nearrow$ (barre = discontinuité). Extrema : $f(0) = 0$ min local, $f(-2) = -4$ max local.

Solution 8.
$D_f = [0, +\infty[$. $f(x) = x - 2\sqrt{x} = \left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{x} = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 - 1$. Minimum -1 atteint en $\sqrt{x} = 1$, soit $x = 1$. f décroissante sur $[0, 1]$, croissante sur $[1, +\infty[$.

Solution 9.
$f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$. Période 2π.
- Max $\sqrt{2}$ en $x = \frac{\pi}{4}$; min $-\sqrt{2}$ en $x = \frac{5\pi}{4}$.
- Zéros en $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, soit dans $[0, 2\pi]$: $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

Solution 10.
$f(x) = |x^2 - 4|$.
- Sur $]-2, 2[$: $f(x) = 4 - x^2$, $f'(x) = -2x$.
- Sur $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$: $f(x) = x^2 - 4$, $f'(x) = 2x$.
- Points anguleux en $x = \pm 2$ (f continue, f' discontinue).
- Variations : $\nearrow$ sur $]-\infty, -2]$ (non, dérivée $= 2x < 0$… attention : sur $]-\infty, -2[$, $f(x) = x^2 - 4$, $f'(x) = 2x < 0$, donc $\searrow$). Reprenons : $\searrow$ sur $]-\infty, -2]$ puis $\nearrow\searrow$ sur $[-2, 0]$ (dérivée $-2x$, positive sur $]-2, 0[$, donc $\nearrow$ là) — attention au raccord. Résumé correct : $\searrow\nearrow\searrow\nearrow$ avec extrema en $-2, 0, 2$.