La dérivation d'une fonction numérique

Chapitre 10

Nombre dérivé, tangente

Définition — Nombre dérivé
Soit f définie sur un intervalle I et $a \in I$. f est *dérivable en* a si la limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie. Sa valeur, notée $f'(a)$, s'appelle le *nombre dérivé* de f en a.

Propriété — Interprétation géométrique
Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la *tangente* à la courbe C_f au point d'abscisse a. L'équation de cette tangente est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple. $f(x) = x^2$ en $a = 1$: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1 \to 2$. Donc $f'(1) = 2$. Tangente : $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

Fonction dérivée

Définition
Si f est dérivable en tout point de I, la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ s'appelle la *fonction dérivée* de f.

Dérivées usuelles

Propriété

$f(x)$	$f'(x)$
k (constante)	0
x	1
x^n pour $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}

$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2} x$

Règles de dérivation

Théorème
Soient u, v dérivables sur I.
- $(u+v)' = u' + v'$
- $(ku)' = ku'$ pour $k \in \mathbb{R}$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ (si $v \neq 0$)
- $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
- *Composée* : si g dérivable en $u(x)$, $(g \circ u)' = u' \times (g' \circ u)$. Particulier : $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

Exemple. $f(x) = \left(x^2+1\right)^3$. Poser $u = x^2+1$, $u' = 2x$. Alors $f' = 3u^2u' = 6x\left(x^2+1\right)^2$.

Sens de variation et extrema

Théorème — Théorème fondamental
Soit f dérivable sur I.
1. Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante.
2. Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante.
3. Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante.

Théorème — Extrema locaux
Si f est dérivable en $a \in I$ intérieur et f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$. La réciproque est fausse : $f'(a) = 0$ n'implique pas un extremum (par exemple $f(x) = x^3$ en $a = 0$).

En pratique : un changement de signe de f' en a (de $+$ à $-$ ou l'inverse) caractérise bien un extremum.

Exemple. $f(x) = x^2 - 6x + 5$. $f'(x) = 2x - 6$ s'annule en $x = 3$, passe de $-$ à $+$: minimum local en $x = 3$, valeur $f(3) = -4$. Sur $\mathbb{R}$, minimum global.

Tableau de variations — méthode type

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier son signe (souvent via factorisation).
3. Dresser un tableau avec : x, signe de $f'(x)$, flèches $\nearrow\searrow$ et valeurs clefs de f.
4. Déduire extrema et intervalles de monotonie.

Exemple. $f(x) = x^3 - 3x$. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Zéros en $x = -1$ et $x = 1$. Signe : $+$ sur $]-\infty, -1[$, $-$ sur $]-1, 1[$, $+$ sur $]1, +\infty[$.

- f croissante sur $]-\infty, -1]$, $f(-1) = 2$ (maximum local) ;
- décroissante sur $[-1, 1]$, $f(1) = -2$ (minimum local) ;
- croissante sur $[1, +\infty[$.