Corrigés — La rotation dans le plan

Chapitre 9

Solution 1.
Formule : $(x; y) \mapsto (-y; x)$. Image de $(2; 3)$: $(-3; 2)$.

Solution 2.
$x' = 1 + (3-1)\cos(\frac{\pi}{2}) - (2-0)\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 + 0 - 2 = -1$. $y' = 0 + (3-1)\sin(\frac{\pi}{2}) + (2-0)\cos(\frac{\pi}{2}) = 2$. Image : $(-1; 2)$.

Solution 3.
$x' = x\cos(\frac{\pi}{3}) - y\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{x}{2} - y\frac{\sqrt{3}}{2}$. $y' = x\sin(\frac{\pi}{3}) + y\cos(\frac{\pi}{3}) = x\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2}$.

- $A(2; 0) \mapsto \left(1; \sqrt{3}\right)$.
- $B(0; 2) \mapsto \left(-\sqrt{3}; 1\right)$.
- $C(1; 1) \mapsto \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Solution 4.
1. $\frac{2\pi}{3}$ est l'angle entre deux sommets consécutifs d'un triangle équilatéral direct (vu du centre). Donc $A \mapsto B$.
2. $-\frac{2\pi}{3}$: $A \mapsto C$.

Solution 5.
$z' - i = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - i) = i(1 + i - i) = i \times 1 = i$. Donc $z' = 2i$.

Solution 6.
Même centre : angles s'additionnent. $R_2 \circ R_1 = R_{O,\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}} = R_{O,\frac{\pi}{2}}$.

Solution 7.
Si $A(x_1; y_1)$ et $B(x_2; y_2)$, alors leurs images A', B' satisfont $x'_A - x'_B = (x_A - x_B)\cos\theta - (y_A - y_B)\sin\theta$ et $y'_A - y'_B = (x_A - x_B)\sin\theta + (y_A - y_B)\cos\theta$. $A'B'^2 = (x'_A - x'_B)^2 + (y'_A - y'_B)^2 = (x_A - x_B)^2(\cos^2 + \sin^2) + (y_A - y_B)^2(\sin^2 + \cos^2)$ (les termes croisés se compensent) $= AB^2$.

Solution 8.
Cercle C de centre $(2; 0)$ rayon 3. $R_{O,\frac{\pi}{2}}$ envoie centre sur $(0; 2)$. Cercle image : $x^2 + (y-2)^2 = 9$.

Solution 9.
Point fixe : $z = e^{i\frac{\pi}{3}}z + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$, soit $\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)z = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $z = 1$ (affixe du centre). L'équation s'écrit $z' - 1 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-1)$, qui est la rotation de centre $(1;0)$ et angle $\frac{\pi}{3}$.

Solution 10.
La rotation de centre A et angle $\frac{\pi}{4}$ envoie le carré $ABCD$ sur un nouveau carré $AB'C'D'$ de même côté mais incliné de $\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'original. A reste fixe.