La rotation dans le plan

Chapitre 9

Définition géométrique

Définition — Rotation de centre Ω et d'angle ϑ
Soient Ω un point et θ un réel (mesure d'angle en radian). La *rotation* de centre Ω et d'angle θ, notée $R_{\Omega,\theta}$, est l'application du plan qui à un point M associe l'unique point $M' = R_{\Omega,\theta}(M)$ tel que :

- $\Omega M' = \Omega M$ (même distance au centre) ;
- l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta$.

Et $R_{\Omega,\theta}(\Omega) = \Omega$ (le centre est invariant).

Expression analytique (repère orthonormé)

Théorème
Soit Ω de coordonnées $(a;b)$ et $M(x;y)$. L'image $M'(x';y')$ par la rotation $R_{\Omega,\theta}$ vérifie :

$$\begin{cases} x' = a + (x-a)\cos\theta - (y-b)\sin\theta \\ y' = b + (x-a)\sin\theta + (y-b)\cos\theta. \end{cases}$$

Si Ω est l'origine : $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$ et $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$.

Démonstration. **Esquisse.** Poser $\overrightarrow{\Omega M} = (u;v)$ de norme $\rho = \sqrt{u^2+v^2}$ et d'angle α. L'image $\overrightarrow{\Omega M'}$ est de même norme mais d'angle $\alpha+\theta$, soit $(\rho\cos(\alpha+\theta), \rho\sin(\alpha+\theta))$. Développer avec les formules d'addition. ∎

Exemple. Rotation de centre O et angle $\frac{\pi}{2}$: $M(x;y) \mapsto M'(-y;x)$. Rotation d'angle π : symétrie centrale, $(x;y) \mapsto (-x;-y)$.

Expression complexe

Identifier le plan euclidien à $\mathbb{C}$ (le point $M(x;y)$ a pour *affixe* $z = x+iy$).

Théorème
La rotation de centre Ω (d'affixe ω) et d'angle θ envoie le point d'affixe z sur le point d'affixe z' vérifiant :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

Pour $\Omega = O$: $z' = e^{i\theta}z$.

Cette formulation est particulièrement commode pour composer des rotations ou démontrer des propriétés géométriques.

Propriétés

Propriété
La rotation $R_{\Omega,\theta}$:
1. est une **isométrie** (conserve les distances) ;
2. conserve les angles (non orientés) et les angles orientés ;
3. conserve l'alignement, le parallélisme, les milieux, les rapports ;
4. image d'une droite = droite ; image d'un cercle = cercle de même rayon ;
5. $R_{\Omega,0} = \mathrm{id}$; $R_{\Omega,\pi}$ = symétrie centrale de centre Ω.

Composition

Théorème
$R_{\Omega,\theta'} \circ R_{\Omega,\theta} = R_{\Omega,\theta+\theta'}$. Deux rotations de même centre commutent, et leur composée est une rotation d'angle la somme des angles.

Deux rotations de centres différents se composent en une rotation (si $\theta + \theta' \neq 2k\pi$) ou une translation (si $\theta + \theta' = 2k\pi$).

Démonstration. Via l'expression complexe : $z \mapsto e^{i\theta}z$ puis $z \mapsto e^{i\theta'}z$ donne $z \mapsto e^{i(\theta+\theta')}z$. ∎

Images de figures classiques

Propriété
Soit $R = R_{\Omega,\theta}$.
- Image d'un point : calcul direct (formule analytique).
- Image d'un segment $[AB]$: segment $[R(A)R(B)]$ (même longueur).
- Image d'un cercle $C(I, r)$: cercle $C(R(I), r)$.
- Image d'un triangle : triangle de mêmes longueurs de côtés et mêmes angles (donc isométrique).

Exemple. Rotation de centre O et angle $\frac{\pi}{3}$ appliquée au triangle équilatéral ABC centré en O : permute cycliquement les sommets selon la direction de rotation.