Corrigés — Les suites numériques

Chapitre 7

Solution 1.

1. $u_0 = -3, u_1 = -1, u_2 = 1, u_3 = 3$.
2. $u_0 = 1, u_1 = \frac{2}{3}, u_2 = \frac{3}{5}, u_3 = \frac{4}{7}$.
3. $u_0 = 2, u_1 = 3, u_2 = 8, u_3 = 63$.
4. $1, 1, 2, 3$ (et suite : $5, 8, 13, ...$).

Solution 2.

1. $u_{n+1} - u_n = 3 > 0$. **Strict. croissante.**
2. $u_{n+1} - u_n = 2n - 5$. Négatif pour $n = 0, 1, 2$, positif à partir de $n = 3$. **Décroissante puis croissante** (minimum autour de $n = 3$).
3. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} < 0$. **Strict. décroissante.**
4. $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - (n+1) - 2^n + n = 2^n - 1 \geq 0$ pour $n \geq 0$, strictement pour $n \geq 1$. **Croissante.**

Solution 3.

1. $u_{\{10\}} = u_0 + 10r = 4 + 30 = 34$.
2. Somme $= 21 \times \frac{u_0 + u_{\{20\}}}{2} = 21 \times \frac{4+64}{2} = 21 \times 34 = 714$.

Solution 4.

1. $u_{\{12\}} - u_5 = 7r = 38 - 17 = 21$, soit $r = 3$. $u_0 = u_5 - 5r = 17 - 15 = 2$.
2. Somme $= 100 \times \frac{u_0 + u_{\{99\}}}{2}$. $u_{\{99\}} = 2 + 99 \times 3 = 299$. Somme $= 100 \times \frac{301}{2} = 15,050$.

Solution 5.

1. Somme géométrique : $\frac{1-3^6}{1-3} = \frac{1-729}{-2} = 364$.
2. $3^n > 1000$: $3^6 = 729, 3^7 = 2187 > 1000$. Dès $n = 7$.

Solution 6.

1. $u_{n+1} = u_n \times 1\{,\}05$, donc géométrique de raison $q = 1\{,\}05$ et $u_0 = 10,000$.
2. $u_n = 10,000 \times 1\{,\}05^n$.
3. $u_5 = 10,000 \times 1\{,\}05^5 \approx 12,762\{,\}82$, soit environ $12,763$ dh.

Solution 7.

1. $S =$ arithmétique, 50 termes, premier 1, dernier 99 : $S = 50 \times \frac{1+99}{2} = 2500$.
2. $T =$ géométrique, 11 termes, raison 2, premier 1 : $T = \frac{1-2^{\{11\}}}{1-2} = 2047$.

3. $U = \sum(2k+1)$ pour $k = 0...20$: 21 termes impairs. $U = (2 \times 0 + 1) + (2 \times 20 + 1) = 1 + 41 = 42$, puis $U = 21 \times \frac{42}{2} = 441$.

Solution 8.

1. $u_n = 2 - \frac{1}{n+1} \in [1, 2[$. **Majorée par 2, minorée par 1**.
2. $u_n \approx n$. **Non majorée, minorée par $u_0 = -1$**.
3. $|u_n| \leq 1$. **Bornée.**

Solution 9.

1. $u_1 = \sqrt{2} \approx 1\{,\}41, u_2 = \sqrt{\sqrt{2}+2} \approx 1\{,\}85, u_3 \approx 1\{,\}96$.
2. Si $0 \leq u_n \leq 2$ alors $0 \leq u_n + 2 \leq 4$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq 2$. Comme $u_0 = 0 \in [0, 2]$, l'encadrement se conserve.
3. $u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n + 2 - u_n^2 = -(u_n^2 - u_n - 2) = -(u_n - 2)(u_n + 1)$. Sur $[0, 2]$, $u_n - 2 \leq 0$ et $u_n + 1 > 0$, donc $u_{n+1}^2 - u_n^2 \geq 0$, soit $u_{n+1} \geq u_n$. **Croissante.**

Solution 10.

Tableau :

n	0	1	2	3	4	5
v_n	2	5	8	11	14	17
w_n	4	8	16	32	64	128
$v_n + w_n$	6	13	24	43	78	145