Calcul trigonométrique

Chapitre 6

Formules d'addition

Théorème — Addition et soustraction
Pour tous réels a, b :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Démonstration. **Esquisse.** On démontre $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ via le produit scalaire de deux vecteurs unitaires d'angles a et b (vu au Chapitre 4). Les trois autres en découlent par les formules $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$ et les relations $\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$. ■

Exemple. $\cos(75°) = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Formules de duplication

Théorème

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a,$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a,$$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} \quad \text{si } \tan a \neq \pm 1.$$

Démonstration. Prendre $b = a$ dans les formules d'addition. Pour $\cos(2a)$, utiliser l'identité fondamentale $\cos^2 + \sin^2 = 1$ pour obtenir les trois formes. ■

Formules de linéarisation

Obtenues en réécrivant $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$ et $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$:

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}, \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}.$$

Pour $\sin a \cos a = \left(\frac{1}{2}\right)\sin(2a)$.

Exemple. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Transformations somme–produit et produit–somme

Théorème — Somme → produit

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Ces formules sont utiles pour factoriser. La démonstration utilise les formules d'addition avec $a = \frac{p+q}{2}, b = \frac{p-q}{2}$.

Théorème — Produit → somme

$$2\cos a\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b),$$

$$2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b),$$

$$2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b).$$

Équations trigonométriques approfondies

Exemple. Résoudre $\cos x + \sin x = 1$.

Méthode. $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$ donne $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, soit $x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. D'où $x = 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Exemple. Résoudre $\sin(2x) = \cos x$.

$2\sin x\cos x - \cos x = 0$, soit $\cos x(2\sin x - 1) = 0$. Alors $\cos x = 0$ $(x = \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ou $\sin x = \frac{1}{2}$ $(x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi)$.

Formule de l'angle auxiliaire

Théorème
Pour tous a, b non tous deux nuls, il existe $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ et φ (unique modulo 2π) tels que :

$$a \cos x + b \sin x = R \cos(x - \varphi),$$

avec $\cos \varphi = \frac{a}{R}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{R}$.

Cette formule est souvent la clef pour résoudre $a \cos x + b \sin x = c$.