

Corrigés — Le barycentre dans le plan

Chapitre 4

Barycentre de deux points

Solution 1.

1. $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$. En évaluant depuis A : $2 \times 0 + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG})(1) + 2 \times (\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AG}) = 0...$
plus simplement : $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{2 \times 0 + 1 \times \overrightarrow{AB}}{2+1}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}$.

G est aux $\frac{1}{3}$ de $[AB]$ en partant de A (car A est plus lourd, G le tire).

2. $\overrightarrow{AG'} = \frac{0+3\overrightarrow{AB}}{1+3} = \left(\frac{3}{4}\right)\overrightarrow{AB}$. $AG' = \left(\frac{3}{4}\right)AB$.

Solution 2.

$G = \left(\frac{3 \times 1 + 1 \times 5}{4}, \frac{3 \times 3 + 1 \times (-1)}{4}\right) = \left(\frac{8}{4}, \frac{8}{4}\right) = (2; 2)$.

Trois points

Solution 3.

1. Par associativité : regrouper A, B en leur milieu I . Poids combiné 2. G_1 est barycentre de $(I, 2), (C, 2)$, soit le milieu de $[IC]$.

2. Somme $2 - 1 + 1 = 2 \neq 0$. $\overrightarrow{AG}_2 = \left(\frac{1}{2}\right)(0 - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \left(\frac{1}{2}\right)(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$.

Solution 4.

1. $G = \left(\frac{6}{3}; \frac{6}{3}\right) = (2; 2)$.

2. Somme = 6. $H = \left(\frac{0+8+6}{6}; \frac{0+0+18}{6}\right) = \left(\frac{14}{6}; 3\right) = \left(\frac{7}{3}; 3\right)$.

Homogénéité / associativité

Solution 5.

$(A, 4), (B, 6)$ et $(A, 2), (B, 3)$ sont proportionnels par facteur 2. Par homogénéité, ils ont le même barycentre.

Solution 6.

$H =$ barycentre de $(A, 2), (B, 1)$: poids total 3. Par associativité, G (poids total $2 + 1 + 3 = 6$) = barycentre de $(H, 3), (C, 3)$. Donc G est le **milieu de $[HC]$** .

Alignement

Solution 7.

Pour $\overrightarrow{AI} = \left(\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB}$: I est barycentre de $(A, 1), (B, 2)$. De même J : barycentre de $(A, 1), (C, 2)$.
Et $K =$ milieu de $[BC]$

barycentre de $(B, 1), (C, 1)$.

Pour aligner I, J, K , il faudrait une combinaison barycentrique reliant les trois ; en général ce n'est pas immédiat et ils ne sont pas alignés.

Cas $\left(\frac{1}{3}\right)$: I, J milieux des segments partant de A dans le triangle. La droite (IJ) est parallèle à (BC) (théorème des milieux), donc (IJ) et (BC) n'ont pas de point commun ; $K \in (BC)$ donc $K \notin (IJ)$ en général. **Non alignés.**

Lignes de niveau

Solution 8.

- Somme des poids = $2 - 1 + 1 = 2 \neq 0$. Le barycentre G de $(A, 2), (B, -1), (C, 1)$ est l'unique point vérifiant l'égalité. $M = G$.
- Somme = 4. Barycentre G' de $(A, 1), (B, 2), (C, 1)$. Unique point $M = G'$.

Synthèse

Solution 9.

- Somme = $2 + k$. $\overrightarrow{AG'} = \frac{1 \times 0 + 1 \times \overrightarrow{AB} + k \times \overrightarrow{AC}}{2+k} = \frac{\overrightarrow{AB} + k \overrightarrow{AC}}{2+k}$.
- $G' = G$: centre de gravité correspond à $k = 1$.
- $G' \in (BC)$ ssi $\overrightarrow{BG'} = t \overrightarrow{BC}$ pour un $t \in \mathbb{R}$. En écrivant $\overrightarrow{BG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AB}$ et en identifiant : les composantes en \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} doivent vérifier $\left(\frac{1}{2+k}\right) - 1 = -t$ et $\frac{k}{2+k} = t$. Donc $t = -\frac{1+k}{2+k}$ et $t = \frac{k}{2+k}$; égalité donne $-(1+k) = k$, soit $k = -\frac{1}{2}$. $k = -\frac{1}{2}$.

Solution 10.

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) = 6\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC}).$$

Par définition de G , la parenthèse vaut $\vec{0}$. Donc la somme vaut $6\overrightarrow{MG}$.