Généralités sur les fonctions numériques

Chapitre 3

Rappels et définitions

Ce chapitre reprend, consolide et approfondit les notions du Chapitre 13 du Tronc Commun. Il prépare l'étude des limites et de la dérivation.

Définition — Fonction numérique
Une *fonction numérique* d'une variable réelle est une règle qui associe à chaque réel x d'un ensemble $D_f \subseteq \mathbb{R}$ un unique réel noté $f(x)$. D_f est le *domaine de définition*.

Propriété — Détermination du domaine
- $f(x)$ implique un quotient $\frac{A}{B}$: exiger $B \neq 0$.
- $f(x)$ implique $\sqrt{A}$: exiger $A \geq 0$.
- $f(x) = \ln(A)$ ou $\frac{1}{\sqrt{A}}$: exiger $A > 0$.
- Composition $g \circ h$: $x \in D_h$ et $h(x) \in D_g$.

Opérations sur les fonctions

Définition
Soient f définie sur D_f, g sur D_g, et $k \in \mathbb{R}$.
- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, sur $D_f \cap D_g$.
- $(kf)(x) = kf(x)$, sur D_f.
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$, sur $D_f \cap D_g$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ sur $\left(D_f \cap D_g\right) \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$.
- Composée $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ sur $\left\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\right\}$.

Exemple. $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$.
- $(f+g)(x) = x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
- $(g \circ f)(x) = (x+1)^2$ sur $\mathbb{R}$.
- $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$.
- En général $g \circ f \neq f \circ g$.

Parité et périodicité

Définition — Fonction paire, impaire
Soit D_f symétrique par rapport à 0 (i.e. $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$).
- f est *paire* si $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$.
- f est *impaire* si $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$.

Propriété
- La courbe d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe (Oy)**.
- La courbe d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine** O.

Définition — Fonction périodique
f est *périodique* de période $T > 0$ si pour tout $x \in D_f$: $x + T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$. La plus petite T vérifiant cela, si elle existe, est la *période fondamentale*.

Exemple.
- cos et sin sont 2π-périodiques (fondamentale 2π).
- tan est π-périodique.
- $x \mapsto \sin(3x)$ est $\frac{2\pi}{3}$-périodique.

Sens de variation et extrema

Définition — Monotonie sur un intervalle
Soit I un intervalle inclus dans D_f.
- f est *croissante* sur I si $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f est *strictement croissante* sur I si l'inégalité est stricte.
- Même définition pour (strictement) *décroissante* avec $\geq$.
- f est *constante* si f prend la même valeur sur tout I.

Propriété — Méthode standard
Pour démontrer la monotonie, on étudie le signe de $f(x_2) - f(x_1)$ ou de $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ pour $x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$.

Exemple. Soit $f(x) = x^2$ sur $[0, +\infty[$. Pour $0 \leq x_1 < x_2$: $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$. Les deux facteurs sont positifs, donc $f(x_2) - f(x_1) > 0$: f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Définition — Maximum, minimum
Soit $x_0 \in D_f$.

- f admet un *maximum global* en x_0 si $\forall x \in D_f, f(x) \leq f(x_0)$. La valeur $f(x_0)$ est alors le maximum.
- *Minimum global* : même définition avec $\geq$.
- *Local* : la propriété ne vaut que sur un voisinage de x_0.

Opérations et monotonie

Propriété
Soient f et g monotones sur un même intervalle I.
- Si f et g sont toutes deux croissantes (ou toutes deux décroissantes), $f+g$ est monotone de même sens.
- Si f est croissante et $\lambda > 0$, λf est croissante.
- Si f est croissante et $\lambda < 0$, λf est décroissante.

Propriété — Composition
Soient f monotone sur I et g monotone sur $f(I)$. Alors $g \circ f$ est monotone, et son sens de variation suit la « règle des signes » :

f sur I	g sur $f(I)$	$g \circ f$ sur I
croissante	croissante	croissante
croissante	décroissante	décroissante
décroissante	croissante	décroissante
décroissante	décroissante	croissante

Transformations de courbes

Si C_f est la courbe de f et $a, b, k \in \mathbb{R}$ (avec $k > 0$) :

Propriété
1. $g(x) = f(x) + b$: translation verticale de vecteur $b\vec{\jmath}$.
2. $g(x) = f(x - a)$: translation horizontale de vecteur $a\vec{\imath}$.
3. $g(x) = -f(x)$: symétrie par rapport à (Ox).
4. $g(x) = f(-x)$: symétrie par rapport à (Oy).
5. $g(x) = kf(x)$: dilatation verticale de rapport k.
6. $g(x) = f(kx)$: dilatation horizontale de rapport $\frac{1}{k}$.

Exemple. $f(x) = x^2$. Alors $g(x) = (x-3)^2 + 2$ se construit en translatant la parabole de vecteur $(3; 2)$. Minimum 2 atteint en $x = 3$.

Fonctions de référence : tableau récapitulatif

Propriété

Fonction	D_f	Parité	Variations
$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$	paire	constante
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	impaire	strict. croissante
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	paire	$\searrow$ sur $\mathbb{R}_-$, $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$
$x \mapsto x^3$	$\mathbb{R}$	impaire	strict. croissante
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	impaire	$\searrow$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$		strict. croissante
$x \mapsto \lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	paire	$\searrow$ sur $\mathbb{R}_-$, $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

Encadrement et comparaison de fonctions

Définition
Soient f et g définies sur I. On dit $f \leq g$ sur I si $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$. De même pour $f = g$ (égalité de fonctions).

Exemple. Sur $\mathbb{R}_+$, $x \leq \sqrt{x}$ est faux en général ($x = 4 : 4 > 2$). Mais sur $[0, 1]$, $x^2 \leq x$ car $x^2 - x = x(x-1) \leq 0$.

Propriété — Bornes
f est *majorée* sur I s'il existe M tel que $\forall x \in I, f(x) \leq M$. De même *minorée* et *bornée* = majorée ET minorée.