Exercices — Généralités sur les fonctions

Chapitre 3

Domaine de définition

Exercice 1. Déterminer D_f pour :
1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$;
2. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$;
3. $f(x) = \sqrt{2x-6}$;
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$;
5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Parité et périodicité

Exercice 2. Étudier la parité en justifiant :
1. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$;
2. $f(x) = \frac{x^3-x}{x^2+1}$;
3. $f(x) = |x| + x$;
4. $f(x) = \cos x + x \sin x$.

Exercice 3. Démontrer que la fonction $f(x) = \sin(3x) + \cos(2x)$ est 2π-périodique. Est-ce la période fondamentale ?

Monotonie

Exercice 4. Étudier le sens de variation sur l'intervalle indiqué :
1. $f(x) = 2x - 5$ sur $\mathbb{R}$;
2. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$;
3. $f(x) = \sqrt{x+2}$ sur $[-2, +\infty[$;
4. $f(x) = -x^2 + 4x$ sur $]-\infty, 2]$.

Exercice 5. Soient f croissante sur I et g décroissante sur $f(I)$. Démontrer que $g \circ f$ est décroissante sur I.

Composition

Exercice 6. Soient $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = x^2$.
1. Calculer $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$.
2. Comparer.
3. Existe-t-il $x \in \mathbb{R}$ tel que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?

Exercice 7. Soit $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 1 - x$. Déterminer le domaine de $f \circ g$ puis de $g \circ f$.

Transformations de courbe

Exercice 8. Soit $f(x) = x^2$ de courbe C_f. Décrire la transformation géométrique qui permet d'obtenir la courbe de :
1. $g(x) = x^2 + 4$;
2. $h(x) = (x - 2)^2$;
3. $k(x) = -(x + 1)^2$;
4. $\ell(x) = 3x^2$.

Exercice 9. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Construire (à main levée) la courbe de $g(x) = 2\sqrt{x - 1} - 3$ et indiquer l'ordre des transformations.

Extrema

Exercice 10. Trouver les extrema de $f(x) = x^2 - 6x + 10$ sur $\mathbb{R}$.

Indication : forme canonique.

Exercice 11. Démontrer que $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ vérifie $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et déterminer les valeurs où l'égalité est atteinte.

Indication : étudier le signe de $f(x) - \frac{1}{2}$ et de $f(x) + \frac{1}{2}$.

Synthèse

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - 3x$.
1. Étudier la parité de f.
2. Calculer $f(1) - f(0)$ et $f(2) - f(1)$. f est-elle monotone sur $[0, 2]$?
3. Déterminer $f([-1, 1])$.

Exercice 13. Soit $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
1. Montrer que f peut s'écrire $f(x) = 1 + \frac{3}{x-2}$.

2. En déduire le sens de variation sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$.
3. Comparer $f(x)$ à 1 selon les valeurs de x.