Mathématiques · Tronc Commun Scientifique

Dénombrement et probabilités

Chapitre 7

Rappels de dénombrement

- Permutations : $n!$.
- Arrangements : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.
- Combinaisons : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.
- Formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Probabilité

Définition
Soit Ω un univers fini. Une **probabilité** est $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ avec $P(\Omega) = 1$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.

Propriété
1. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$;
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
3. Équiprobabilité : $P(A) = \text{card}\,\frac{A}{\text{card}}\Omega$.

Conditionnement et indépendance

Définition
Si $P(B) \neq 0$: $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Théorème — Probabilités totales
Si (B_i) est une partition de Ω avec $P(B_i) > 0$:

$$P(A) = \sum_i P(B_i) P(A \mid B_i).$$

Variable aléatoire

Définition
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ avec support $\{x_1, ..., x_n\}$:

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i), \quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Loi binomiale

Définition
$X \sim \mathcal{B}(n, p)$ (loi binomiale) :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

$E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$.

Exemple. On interroge 100 clients. La probabilité d'achat est $p = 0\{,\}2$. Soit X le nombre d'acheteurs. $X \sim \mathcal{B}(100, 0\{,\}2)$. $E(X) = 20$, $V(X) = 16$, $\sigma \approx 4$.