

Calcul intégral

Chapitre 6

Intégrale d'une fonction continue

Définition

Soient f continue sur $[a, b]$ et F une primitive quelconque de f sur cet intervalle. L'*intégrale* de f sur $[a, b]$ est :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

La valeur ne dépend pas du choix de la primitive (constantes se soustraient).

Propriétés

Propriété

Pour f, g continues sur $[a, b]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. **Linéarité** : $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.
2. **Relation de Chasles** : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ pour tout $c \in [a, b]$.
3. **Positivité** : si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f \geq 0$.
4. **Monotonie** : si $f \leq g$ alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
5. $\int_a^a f = 0$; $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Théorème fondamental

Théorème

Soit f continue sur I contenant a . La fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a . En particulier $F' = f$.

Intégration par parties (IPP)

Théorème

Soient u, v de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

Exemple. Calculer $I = \int_0^1 xe^x \, dx$. $u = x, v' = e^x : u' = 1, v = e^x$. $I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - (e - 1) = 1$.

Changement de variable (introduction)

En 2e Bac, on utilise surtout les formes reconnaissables : $\int u' f(u) \, dx = F(u) + c$ où F est primitive de f .

Exemple. $\int 2xe^{x^2} \, dx : u = x^2, u' = 2x$. Primitive : $e^{x^2} + c$.

Valeur moyenne

Définition

La *valeur moyenne* de f sur $[a, b]$ est :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Aire d'une surface

Théorème

L'aire de la surface délimitée par C_f (avec $f \geq 0$), l'axe (Ox) et les droites $x = a$ et $x = b$ vaut $\int_a^b f(x) \, dx$ (unités d'aire). Si f change de signe, découper l'intervalle selon les zéros et sommer les valeurs absolues. L'aire entre deux courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$ (avec $f \geq g$) sur $[a, b]$ vaut $\int_a^b (f - g) \, dx$.

Exemple. Aire sous $y = x^2$ de 0 à 1 : $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$.

Volume d'un solide de révolution (introduction)

Propriété

Le volume du solide engendré par la rotation autour de (Ox) de la courbe $y = f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$ est :

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Exemple. Volume de la sphère de rayon R : $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ sur $[-R, R]$. $V = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = \pi \left(2R^3 - 2\frac{R^3}{3} \right) = \frac{4\pi R^3}{3}$.