Corrigés — Fonctions logarithmiques

Chapitre 4

Solution 1.

1. $x = e^2$.
2. $x^2 - 1 = x + 1$ avec $x^2 - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$. $(x-1)(x+1) = x+1$, donc $(x+1)(x-2) = 0$. Retenir $x = 2$.
3. Condition $x > 3$. $\ln(x(x-3)) = \ln(10)$, $x^2 - 3x - 10 = 0$. Racines $5, -2$. Retenir $x = 5$.
4. Poser $X = \ln x$: $X^2 - 3X + 2 = 0$, $X = 1$ ou $X = 2$. Donc $x = e$ ou $x = e^2$.

Solution 2.

1. $f'(x) = \ln x + 1$.
2. $g'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.
3. $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

Solution 3.

1. 0 (croissance comparée, plus fort).
2. 0 ($x \ln x \to 0$ donc $x^2 \ln x \to 0$).
3. $\ln x - x = x\left(\ln \frac{x}{x} - 1\right) \to +\infty \times (-1) = -\infty$.

Solution 4.

1. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Décroissante sur $]0, 1]$, croissante sur $[1, +\infty[$.
2. Minimum en 1 : $f(1) = 1$. Donc $f(x) \geq 1 > 0$, soit $x > \ln x$ pour tout $x > 0$.
3. Courbe avec asymptote verticale en 0^+, minimum $(1, 1)$, branche quasi-linéaire en $+\infty$.

Solution 5.

Condition : $x > 0$ et $x + 2 > 0$, donc $x > 0$. $\ln x + \ln(x+2) \leq 1$, $\ln(x(x+2)) \leq 1$, $x^2 + 2x \leq e$. $x = \frac{-2+\sqrt{4+4e}}{2} = -1 + \sqrt{1+e}$. $S =]0, -1 + \sqrt{1+e}]$ (approx $]0, 0\{,\}928]$).