Fonctions logarithmiques

Chapitre 4

Fonction logarithme népérien

Définition
La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est définie sur $]0, +\infty[$ comme la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. Ainsi $\ln(1) = 0$ et $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.

Propriété — Propriétés algébriques
Pour tous $x, y > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:
1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;
2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$;
3. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$;
4. $\ln(\sqrt{x}) = \left(\frac{1}{2}\right) \ln x$.

Étude de ln

ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, avec :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Le nombre $e \approx 2\{,\}718$ vérifie $\ln(e) = 1$.

Propriété — Limites usuelles
1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissance comparée) ;
2. $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$;
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Dérivée

Propriété
1. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
2. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ (si $u > 0$).

Exemple. Dériver $f(x) = \ln(x^2 + 1)$: $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

Logarithme décimal

Définition
Le **logarithme décimal** est $\log x = \ln \frac{x}{\ln} 10$. On a $\log(10) = 1$ et les mêmes propriétés algébriques que ln.

Étude d'une fonction avec ln

Pour étudier $f(x) = \ln x - x$:

- Domaine : $]0, +\infty[$.
- Dérivée : $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$. Positive sur $]0, 1]$, négative sur $[1, +\infty[$.
- Maximum en 1 : $f(1) = -1$.
- Limites : $f(x) \to -\infty$ en 0^+ et en $+\infty$.

Donc $f(x) < 0$ pour tout $x > 0$: $\ln x < x$ partout, une inégalité utile.