Suites numériques (convergence + finance)

Chapitre 3

Convergence

Définition
La suite (u_n) **converge vers** ℓ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$. On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Propriété — Opérations
Si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$:
1. $u_n + v_n \to \ell + \ell'$;
2. $u_n v_n \to \ell\ell'$;
3. si $\ell' \neq 0$, $\frac{u_n}{v_n} \to \frac{\ell}{\ell'}$.

Limites usuelles

Propriété
1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ pour tout $k > 0$.
2. Suite géométrique $u_n = q^n$:
   - $|q| < 1$: $u_n \to 0$;
   - $q = 1$: $u_n = 1$;
   - $q > 1$: $u_n \to +\infty$;
   - $q \leq -1$: divergente.

Théorème — Convergence monotone
Toute suite **croissante et majorée** converge. Toute suite **décroissante et minorée** converge.

Suites adjacentes

Définition
Deux suites $(u_n), (v_n)$ sont **adjacentes** si (u_n) croît, (v_n) décroît, et $v_n - u_n \to 0$. Alors elles convergent vers la même limite.

Applications financières

Propriété — Capitalisation composée
C_0 placé au taux composé t par période pendant n périodes :

$$C_n = C_0(1+t)^n.$$

(C_n) est géométrique de raison $1+t>1$, donc $C_n \to +\infty$.

Propriété — Actualisation
La **valeur actuelle** d'un capital F disponible dans n périodes, au taux t, est :

$$V_0 = \frac{F}{(1+t)^n} = F(1+t)^{-n}.$$

Propriété — Annuités constantes
n versements constants a en fin de période, taux t :

- valeur acquise (après n versements) : $V_n = a\frac{(1+t)^n-1}{t}$;
- valeur actuelle : $V_0 = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$.

Exemple type

Exemple. Pour acheter un bien à 200000 DH, combien verser chaque année pendant 10 ans au taux 5% ? $V_0 = a\frac{1-1\{,\}05^{-10}}{0}\{,\}05$, donc $a = V_0 \times 0\{,\}\frac{05}{1-1\{,\}05^{-10}} \approx 200000 \times 0\{,\}1295 \approx 25905$ DH par an.