Corrigés — Dérivation et étude des fonctions

Chapitre 2

Solution 1.
$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$. $f'(x)=\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{x}$ sur $]0,+\infty[$. En 0 : $\frac{f(x)-0}{x}=\sqrt{x}\to 0$. $f'(0)=0$ existe. **Dérivable en 0**.

Solution 2.
$f(x)=|x^2-1|$. Changement de formule en $x=\pm 1$. En $x=1$: à gauche $f(x)=1-x^2$, $f'(x)=-2x$, limite -2. À droite $f(x)=x^2-1$, $f'(x)=2x$, limite 2. Dérivées ± 2 différentes, **non dérivable** en ± 1.

Solution 3.
f continue sur $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$, dérivable sur l'ouvert, $f\left(-\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}=0=f\left(\sqrt{3}\right)$. $f'(c)=3c^2-3=0 \iff c=\pm 1\in]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$. **Deux valeurs** : $c=-1$ et $c=1$.

Solution 4.
$f(0)=f(1)=0$. Continue, dérivable sur $]0,1[$. $f'(x)=\frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}$. $f'(c)=0\iff c=\frac{1}{2}$.

Solution 5.
Par TAF appliqué à sin sur $[x,y]$ (ou $[y,x]$) : $\sin y-\sin x=\cos(c)(y-x)$ pour un c entre x et y. $|\cos c|\leq 1$, d'où $|\sin y-\sin x|\leq|y-x|$.

Solution 6.
$f(x)=x^3-3x^2+4$. $D=\mathbb{R}$. $\lim_{\pm\infty}=\pm\infty$. $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$. Zéros $0,2$. Signe $+,-,+$. Max local $f(0)=4$, min local $f(2)=0$. Pas d'asymptote.

Solution 7.
$D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Division : $f(x)=x+2+\frac{3}{x-2}$. Asymptote verticale $x=2$; asymptote oblique $y=x+2$. $f'(x)=1-\frac{3}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2-3}{(x-2)^2}$, zéros $2\pm\sqrt{3}$. Variations : $\nearrow\searrow|\searrow\nearrow$.

Solution 8.
$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$. $\lim_{+\infty}=+\infty$. $\lim_{-\infty}f(x)$: forme $-\infty+(+\infty)$, par conjuguée : $f(x)=\frac{1}{-x+\sqrt{x^2+1}}\to 0$. Donc asymptote horizontale $y=0$ en $-\infty$. $f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0$. Strict. croissante sur $\mathbb{R}$, de 0 à $+\infty$.

Solution 9.
Volume : $V(x) = x(20-2x)^2$ pour $0 < x < 10$. $V'(x) = (20-2x)^2 + x \times 2(20-2x)(-2) = (20-2x)(20-2x-4x) = (20-2x)(20-6x)$. Zéros : $x = 10$ (bord) et $x = \frac{10}{3}$. V maximum en $x = \frac{10}{3}$ cm. $V_{\max} = \left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{40}{3}\right)^2 = \frac{16000}{27}$ cm$^3 \approx 593$ cm^3.

Solution 10.
$f(x) = x^2 e^{\{-x\}}$.
1. $f'(x) = 2xe^{\{-x\}} - x^2 e^{\{-x\}} = e^{\{-x\}} x(2-x)$.
2. $e^{\{-x\}} > 0$. Signe de $x(2-x)$: $-, +, -$. Variations $\searrow \nearrow \searrow$.
3. Min local en $x = 0$ ($f(0) = 0$), max local en $x = 2$ ($f(2) = 4e^{\{-2\}}$).