Corrigés — Limites et continuité

Chapitre 1

Solution 1.
1. $\frac{\sin(3x)}{x} = 3\frac{\sin(3x)}{3x} \to 3 \times 1 = 3$.
2. $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$. $\frac{1-\cos x}{x^2} = 2\sin^2\frac{\frac{x}{2}}{x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 \to \frac{1}{2}$.
3. $x - \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \to 0$ par conjuguée.
4. $(x-1)\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1} \to \frac{3}{2}$.

Solution 2.
1. $\frac{2x-1}{3x+1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{3x+1}$, tous deux $\to \frac{2}{3}$.
2. $|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x| \to 0$.
3. $|\sin\frac{x}{\sqrt{x}}| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$.

Solution 3.
1. $\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{x} = 1 = f(0)$. **Continue.**
2. $f(x) = x + |x|$. À droite $f = 2x \to 0$, à gauche $f = 0$. $f(0) = 0$. **Continue.**
3. $|x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq x^2 \to 0 = f(0)$. **Continue.**

Solution 4.
f continue, $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ strict. croissante. $f(1) = -2 < 0, f(2) = 7 > 0$. Unique racine. Dichotomie : $f(1.5) = 3.375 + 3 - 5 = 1.375 > 0$. Racine in $[1, 1.5]$. $f(1.25) \approx -0.56$. Racine in $[1.25, 1.5]$. $f(1.3) \approx 0.4$. Racine in $[1.25, 1.3]$. **À 10^{-1} près : $1\{,\}3$.**

Solution 5.
$g(x) = \cos x - x$. $g(0) = 1 > 0$, $g(1) = \cos 1 - 1 \approx -0.46 < 0$. Continue, change de signe, donc $g(c) = 0$ pour un $c \in]0, 1[$.

Solution 6.
f continue, strict. croissante sur $[0, 2]$ (car $f'(x) = 2x > 0$). $f([0, 2]) = [f(0), f(2)] = [-2, 2]$. Segment.

Solution 7.
1. Conjuguée : $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \to \frac{1}{2}$. **Prolongement $f(0) = \frac{1}{2}$.**
2. $\sin\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \times \frac{\sin x}{x} \to 0 \times 1 = 0$. **Prolongement $f(0) = 0$.**
3. $\frac{1}{x}$: limite $\pm\infty$, pas de prolongement.

Solution 8.
Soit $g(x) = f(x) - x$. Continue sur $[0, 1]$. $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$ (car $f(0) \in [0, 1]$). $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ (car $f(1) \in [0, 1]$). Par TVI, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $g(c) = 0$, soit $f(c) = c$.

Solution 9.
$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$; $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Simplification : $\frac{x+2}{x-1} \to 4$ quand $x \to 2$.

Solution 10.
$f \to 0$ quand $|x| \to +\infty$: il existe $M > 0$ tel que $|x| > M \Longrightarrow |f(x)| \leq 1$. Sur $[-M, M]$, f continue sur un segment donc bornée : $|f| \leq K$. Globalement $|f| \leq \max(K, 1)$. **Bornée.**