

Limites et continuité

Chapitre 1

Rappels et approfondissement des limites

Les limites ont été introduites en 1ère Bac ; on les reprend plus rigoureusement.

Définition — Limite en un point (version précisée)

Soient f définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ signifie : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Définition — Limite en l'infini

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ signifie : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que $x > A \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Théorème des gendarmes (encadrement)

Théorème — Théorème des gendarmes

Soient f, g, h trois fonctions et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si, sur un voisinage de a (sauf peut-être en a) :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Exemple. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$: $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \pm \frac{1}{x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Continuité

Définition

f est *continue en a* si $a \in D_f$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I .

Propriété

Toute fonction construite par somme, produit, quotient (hors zéro du dénominateur), composition de fonctions usuelles (polynomiales, rationnelles, racine, trigonométriques, exp, ln) est continue sur son domaine.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Théorème — TVI

Soit f continue sur $[a, b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Théorème — Corollaire — existence d'un zéro

Si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, alors f admet au moins une racine dans $]a, b[$. Si de plus f est strictement monotone, cette racine est unique.

Exemple. $f(x) = x^3 + x - 1$. $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$. f est continue et strictement croissante (car $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$). Donc l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $]0, 1[$.

Fonctions continues sur un segment

Théorème

Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est **bornée et atteint ses bornes** : il existe $x_m, x_M \in [a, b]$ tels que $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ pour tout $x \in [a, b]$. Conséquence : l'image $f([a, b])$ est un segment $[m, M]$.

Composition et limites

Théorème — Limite d'une composée

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(u(x)) = \ell$.

Exemple. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x^2) = \cos(0) = 1$ (cos continue).

Prolongement par continuité

Si f est définie sur un voisinage épointé de a et admet une limite finie ℓ en a , on peut *prolonger par continuité* en posant $\tilde{f}(a) = \ell$.

Exemple. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Prolongement : $\tilde{f}(0) = 1$, continue sur \mathbb{R} .