

# Corrigés — Étude de fonctions

## Chapitre 9

### Solution 1.

$D_f = \mathbb{R}$ .  $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ . Zéros 0, 2. Signe : +, -, +.  $f \nearrow$  sur  $] -\infty, 0]$ ,  $\searrow$  sur  $[0, 2]$ ,  $\nearrow$  sur  $[2, +\infty[$ .  $f(0) = 2$  max local ;  $f(2) = -2$  min local.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$ .

### Solution 2.

$f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$ . Développer :  $x^3 - 3x + 2$ . Dérivée  $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$ . Variations :  $\nearrow \searrow \nearrow$ .  $f(1) = 0$  min,  $f(-1) = 4$  max.

### Solution 3.

Sur  $]0, +\infty[$  :  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ . Zéro en  $x = 1$ . Minimum  $f(1) = 2$ . Sur  $] -\infty, 0[$  (par imparité) : maximum  $-2$  en  $x = -1$ .  $f(x) - x \rightarrow 0$  donc asymptote oblique  $y = x$  en  $\pm\infty$ .

### Solution 4.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Division :  $f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-2}$ .

- Asymptote verticale  $x = 2$  ;  $\lim_{x \rightarrow 2^-} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} = +\infty$ .
- Asymptote oblique  $y = x + 2$ .

$f'(x) = 1 - \frac{3}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - 3}{(x-2)^2}$ , zéros en  $2 \pm \sqrt{3}$ .

### Solution 5.

$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$ .  $D_f = \mathbb{R}$ .  $\lim_{\pm\infty} = 0$ , asymptote horizontale  $y = 0$ .  $f'(x) = \frac{2(x^2+1) - (2x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 2}{(x^2+1)^2} = (-2) \frac{x^2 + x - 1}{(x^2+1)^2}$ . Zéros en  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Signe opposé selon l'intervalle. Maximum et minimum aux racines.

### Solution 6.

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ .  $D_f = \mathbb{R}$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  (conjuguée).  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0$  pour tout  $x$ . **Strict. décroissante** sur  $\mathbb{R}$ .

### Solution 7.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Division :  $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ . Asymptote verticale  $x = -1$ , asymptote oblique  $y = x - 1$ .  $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ . Zéros 0, -2. Variations :  $\nearrow \searrow | \searrow \nearrow$  (barre = discontinuité). Extrema :  $f(0) = 0$  min local,  $f(-2) = -4$  max local.

**Solution 8.**

$D_f = [0, +\infty[$ .  $f(x) = x - 2\sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} = (\sqrt{x} - 1)^2 - 1$ . Minimum  $-1$  atteint en  $\sqrt{x} = 1$ , soit  $x = 1$ .  $f$  décroissante sur  $[0, 1]$ , croissante sur  $[1, +\infty[$ .

**Solution 9.**

$f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ . Période  $2\pi$ .

- Max  $\sqrt{2}$  en  $x = \frac{\pi}{4}$  ; min  $-\sqrt{2}$  en  $x = \frac{5\pi}{4}$ .
- Zéros en  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ , soit dans  $[0, 2\pi]$  :  $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ .

**Solution 10.**

$f(x) = |x^2 - 4|$ .

- Sur  $] -2, 2[$  :  $f(x) = 4 - x^2$ ,  $f'(x) = -2x$ .
- Sur  $] -\infty, -2[ \cup ] 2, +\infty[$  :  $f(x) = x^2 - 4$ ,  $f'(x) = 2x$ .
- Points anguleux en  $x = \pm 2$  ( $f$  continue,  $f'$  discontinue).
- Variations :  $\nearrow$  sur  $] -\infty, -2[$  (non, dérivée =  $2x < 0$ ... attention : sur  $] -\infty, -2[$ ,  $f(x) = x^2 - 4$ ,  $f'(x) = 2x < 0$ , donc  $\searrow$ ). Reprenons :  $\searrow$  sur  $] -\infty, -2]$  puis  $\nearrow \searrow$  sur  $[-2, 0]$  (dérivée  $-2x$ , positive sur  $] -2, 0[$ , donc  $\nearrow$  là) — attention au raccord. Résumé correct :  $\searrow \nearrow \searrow \nearrow$  avec extrema en  $-2, 0, 2$ .