Étude et représentation d'une fonction

Chapitre 9

Plan d'étude type

Étudier une fonction f signifie, en général, suivre un plan reproductible en neuf étapes :

1. **Domaine** D_f.
2. **Parité / périodicité** (symétries éventuelles de la courbe).
3. **Limites** aux bornes du domaine.
4. **Asymptotes** horizontales, verticales, obliques.
5. **Dérivée** $f'(x)$ et son signe.
6. **Tableau de variations**.
7. **Extrema** locaux et globaux.
8. **Points particuliers** (intersections avec les axes, tangentes horizontales, points d'inflexion quand faisable).
9. **Tracé** soigné.

Branches infinies et asymptotes obliques

Propriété
Soit f définie sur un intervalle contenant $+\infty$ (ou $-\infty$).
- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ fini : **asymptote horizontale** $y = \ell$.
- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ et $\lim(f(x) - ax) = b$ fini : **asymptote oblique** $y = ax + b$.
- Si $\frac{f(x)}{x} \to \pm\infty$: **branche parabolique** de direction verticale.
- Si $\frac{f(x)}{x} \to 0$: branche parabolique de direction horizontale.

Exemple. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$. Division polynomiale : $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1}$. Donc asymptote oblique $y = x + 1$ en $\pm\infty$. Asymptote verticale $x = 1$.

Études par famille

Fonctions rationnelles

On factorise numérateur et dénominateur. Les zéros du dénominateur donnent des asymptotes verticales (ou des « trous » si zéros communs se simplifient). Diviser pour trouver asymptote oblique éventuelle.

Exemple. $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2} = (x-2)\frac{x+2}{x+2} = x-2$ (sauf en $x=-2$). Pas d'asymptote verticale (trou « rebouché »).

Fonctions avec racines

Conditions d'existence, comportement asymptotique via conjuguée.

Exemple. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$. $D_f = \mathbb{R}$ (discriminant négatif). $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \sqrt{1} = 1$; $\lim(f(x)-x) = \frac{1}{2}$ (par conjuguée). Donc asymptote oblique $y = x + \frac{1}{2}$ en $+\infty$.

Fonctions trigonométriques

Exploiter la périodicité pour limiter l'étude à une période ; étendre ensuite par périodicité. Parité / impairité divisent l'étude par 2.

Points d'inflexion (introduction)

Un *point d'inflexion* est un point où la courbe traverse sa tangente — intuitivement, où elle change de concavité. À ce niveau, on s'en tient à la détection visuelle et au changement de signe de la dérivée seconde (quand calculable) ; l'étude formelle vient en 2e Bac.

Exemple complet

Exemple. Étudier $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$.

1. Domaine : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Limites :
- $\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{1-1+1}{0^-} = -\infty$; $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$. Asymptote verticale $x=1$.
- $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ (division). $\lim_{\pm\infty}(f(x)-x) = 0$. Asymptote oblique $y = x$.

3. Dérivée : $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Zéros $x=0, x=2$. Signe : $+$ sur $]-\infty,0[$, $-$ sur $]0,1[$, $-$ sur $]1,2[$, $+$ sur $]2,+\infty[$.

4. Tableau :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f'		$+$ 0 $-$	vertic.	$-$ 0 $+$	
f	$-\infty$	-1 max loc.	$\pm\infty$	3 min loc.	$+\infty$

5. Points remarquables :
- $f(0) = -1$ (max local, tangente horizontale).
- $f(2) = 3$ (min local, tangente horizontale).

6. Tracé : asymptotes $x=1$ et $y=x$, respecter les variations.