Corrigés — La dérivation

Chapitre 8

Solution 1.

1. $\frac{x^2+3x-4}{x-1} = (x-1)\frac{x+4}{x-1} = x+4 \to 5$. Donc $f'(1) = 5$.
2. $\frac{(\frac{1}{x})-(\frac{1}{2})}{x-2} = \frac{2-x}{2x(x-2)} = -\frac{1}{2x} \to -\frac{1}{4}$. $f'(2) = -\frac{1}{4}$.
3. Conjuguée : $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{\sqrt{x}+2} \to \frac{1}{4}$. $f'(4) = \frac{1}{4}$.

Solution 2.

1. $f'(x) = 2x$, $f'(3) = 6$, $f(3) = 9$. Tangente : $y = 6(x-3)+9 = 6x-9$.
2. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'(1) = -1$, $f(1) = 1$. Tangente : $y = -x+2$.
3. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, $f(0) = 1$. Tangente : $y = \frac{x}{2}+1$.

Solution 3.

1. $f'(x) = 4x^3 - 6x + 5$.
2. Développer puis dériver, ou produit : $(2)(x^2-3) + (2x+1)(2x) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6$.
3. $\frac{1\times(x+1)-(x-1)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$.
4. $\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
5. $3\cos(3x + \frac{\pi}{4})$.
6. $2\cos x \times (-\sin x) = -\sin(2x)$ (par formule de duplication).

Solution 4.

1. $f'(x) = 2x-4 = 2(x-2)$. Zéro en $x=2$. Signe : $-$ avant, $+$ après. Minimum en $x=2$, $f(2) = -1$.
2. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Zéros ± 1. Signe : $+$ sur $]-\infty, -1[$, $-$ sur $]-1, 1[$, $+$ sur $]1, +\infty[$. Maximum local en -1 ($f(-1) = 3$), minimum local en 1 ($f(1) = -1$).
3. $f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0$ partout où défini. **Décroissante** sur chacun des deux intervalles.

Solution 5.

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1) = 4x(x-1)(x+1)$. Zéros : $-1, 0, 1$. Signe : $-, +, -, +$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f'		$-$	$+$	$-$	$+$
f	$+\infty$	-1 min	0 max loc.	-1 min	$+\infty$

Minimum global -1 en $x = \pm 1$.

Solution 6.
1. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
2. $f'(x) = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1$ (sur $]0, +\infty[$). Signe : $-$ sur $]0, 1[$, $+$ sur $]1, +\infty[$.
3. Minimum en $x = 1$, $f(1) = 2$.

Solution 7.
$f(2) = 5$. Tangente a pour coefficient directeur -2, donc $f'(2) = -2$.

Solution 8.
$f(x) = x + \frac{1}{x}$ (même forme que l'exercice précédent). Minimum $= 2$ en $x = 1$.

Solution 9.
$y = -2(x - 1) + 3 = -2x + 5$.

Solution 10.
1. $f'(x) = 5(3x - 1)^4 \times 3 = 15(3x - 1)^4$.
2. $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ (dérivée de racine avec $u = 4 - x^2$).
3. $f(x) = (x + 1)^{-\frac{1}{2}}$. $f'(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$.