

Corrigés — Les limites

Chapitre 7

Solution 1.

- $\lim = 4 - 4 = 0$.
- $3x^2$ domine, $\lim = +\infty$.
- $-2x^3$ domine ; $x \rightarrow -\infty$ donne $x^3 \rightarrow -\infty$, donc $-2x^3 \rightarrow +\infty$. $\lim = +\infty$.
- $\lim = 0$.

Solution 2.

- $(x-1)\frac{x+1}{x-1} \rightarrow 2$.
- $(x-2)\frac{x+2}{x-2} \rightarrow 4$.
- Conjuguée : $\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x+1})} = \frac{1}{\sqrt{1+x+1}} \rightarrow \frac{1}{2}$.
- $(x-3)\frac{x+3}{(x-3)(x-2)} = \frac{x+3}{x-2} \rightarrow 6$.

Solution 3.

- Factoriser $x : \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} \rightarrow 2$.
- x^2 au num, x au dénom : $x \rightarrow +\infty$, donc $\lim = +\infty$.
- $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ (le x^2 domine au dénom).

Solution 4.

- Conjuguée : $\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \rightarrow 0$.
- Conjuguée : $\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \rightarrow \frac{1}{2}$.
- Numérateur $\rightarrow 0$, dénominateur $\rightarrow 1$, donc $\lim = 0$.

Solution 5.

- $x \rightarrow 1^- : x-1 \rightarrow 0^-$, $\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$. $x \rightarrow 1^+ : \rightarrow +\infty$. Pas de limite en 1.
- $\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$ (pour $x \neq 2$). $\lim_{x \rightarrow 2} = \frac{1}{4}$ (à droite et à gauche).

Solution 6.

- Dominante : $2\frac{x^2}{x^2} = 2$. $\lim = 2$.
- Asymptote horizontale $y = 2$ en $\pm\infty$.

Solution 7.

- Division : $x^2 + 2x - 1 = (x-1)(x+3) + 2$. Donc $f(x) = x + 3 + \frac{2}{x-1}$.
- $\frac{2}{x-1} \rightarrow 0$ à l'infini, donc $f(x) - (x+3) \rightarrow 0$. **Asymptote oblique $y = x + 3$.**

Solution 8.

$$f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{x^2 + x} - x - \frac{1}{2} = \frac{(x^2+x) - (x+\frac{1}{2})^2}{\sqrt{x^2+x} + x + \frac{1}{2}} = -\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x} + x + \frac{1}{2}} \rightarrow 0. \text{ Donc asymptote.}$$

Solution 9.

Résultat admis : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Démonstration géométrique via encadrement $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ pour x proche de 0, et gendarmes.

Solution 10.

1. $-1 \leq \cos x \leq 1$. Donc $|2 \cos \frac{x}{x+1}| \leq \frac{2}{x+1} \rightarrow 0$. $\frac{3x}{x+1} \rightarrow 3$. Par somme : $\lim = 3$.
2. $|x^2 \cos(\frac{1}{x})| \leq x^2 \rightarrow 0$. Gendarmes : $\lim = 0$.