Les limites d'une fonction numérique

Chapitre 7

Limite en un point, limite à l’infini

Définition — Limite en un réel a (idée intuitive)
On dit que f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a, noté $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, si $f(x)$ « se rapproche » de ℓ quand x se rapproche de a (sans y être forcément égal).

Définition — Limite infinie
$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ signifie que $f(x)$ peut être rendu plus grand que toute borne prescrite en prenant x suffisamment proche de a. Idem pour $-\infty$.

Définition — Limite en l'infini
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$: $f(x)$ s’approche de ℓ quand x croît indéfiniment. Analogue pour $-\infty$.

Limites des fonctions de référence

Propriété
- $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ pour $n \geq 1$.
- $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n pair, $-\infty$ si n impair.
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Limites à gauche, à droite

Définition
La *limite à gauche* de f en a, notée $\lim_{x\to a^-} f(x)$, est la limite de $f(x)$ quand x tend vers a en restant $< a$. La limite à droite $\lim_{x\to a^+} f(x)$: $x > a$. f admet une limite en a ssi les limites à gauche et à droite existent et coïncident.

Exemple. $f(x) = \frac{1}{x}$:
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

Donc $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas.

Opérations sur les limites

Théorème — Somme, produit, quotient
Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = \ell'$ (réels) :
- $\lim(f+g) = \ell + \ell'$; $\lim(fg) = \ell \times \ell'$;
- $\lim\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\ell}{\ell'}$ si $\ell' \neq 0$;
- $\lim(kf) = k\ell$ pour $k \in \mathbb{R}$.

Les règles s'étendent partiellement aux limites infinies, selon des règles de signe et à l'exception des formes indéterminées ci-dessous.

Formes indéterminées

Quatre formes ne permettent pas de conclure immédiatement :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

Exemple. $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x) = \infty - \infty$ (forme indéterminée). **Méthode** : factoriser le terme dominant : $x^2 - x = x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \to +\infty \times 1 = +\infty$.

Techniques de levée des indéterminations

Factorisation

Souvent, identifier le facteur qui « domine ».

Exemple. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x}{2x^2-5} =$ F.I. $\frac{\infty}{\infty}$. Factoriser : $\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(2-\frac{5}{x^2}\right)} = \frac{1+\frac{3}{x}}{2-\frac{5}{x^2}} \to \frac{1}{2}$.

Identité remarquable / quantité conjuguée

Exemple. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) =$ F.I. Multiplier par la quantité conjuguée : $\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \to 0$.

Factorisation d'un polynôme par la racine

Exemple. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0}$. Factoriser : $(x-1)\frac{x+1}{x-1} = x + 1 \to 2$.

Asymptotes

Définition

- *Asymptote horizontale* $y = \ell$: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$.
- *Asymptote verticale* $x = a$: $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.
- *Asymptote oblique* $y = ax + b$: $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$.

Détecter une asymptote oblique

Si $\frac{f(x)}{x} \to a \neq 0$ et $f(x) - ax \to b$ quand $x \to +\infty$, alors $y = ax + b$ est asymptote oblique de C_f en $+\infty$.

Exemple. $f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$. Pour $x \to \pm\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$. Donc $y = x$ est asymptote oblique.