

# Logarithme décimal

Chapitre 6

## Définition

---

### Définition

Le **logarithme décimal** est la fonction  $\log : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\log(x) = y \Leftrightarrow 10^y = x.$$

On a  $\log(1) = 0$ ,  $\log(10) = 1$ ,  $\log(100) = 2$ , etc.

## Propriétés fondamentales

---

### Propriété

Pour tous  $x, y > 0$  et  $n \in \mathbb{Z}$  :

1.  $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$  ;
2.  $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$  ;
3.  $\log(x^n) = n \log(x)$  ;
4.  $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$  ;
5.  $\log(\sqrt{x}) = \left(\frac{1}{2}\right) \log(x)$ .

## Équations et inéquations

---

Comme  $\log$  est **strictement croissante** :

$$\log(a) = \log(b) \Leftrightarrow a = b, \quad \log(a) < \log(b) \Leftrightarrow a < b \quad (\text{pour } a, b > 0).$$

**Exemple.**  $\log(x) = 3 \Leftrightarrow x = 10^3 = 1000$ .  $\log(x+1) \leq 2 \Leftrightarrow 0 < x+1 \leq 100 \Leftrightarrow -1 < x \leq 99$ .

## Fonction $\log$

---

La fonction  $\log$  est définie sur  $]0, +\infty[$ , **strictement croissante**, avec  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$ . La courbe passe par  $(1, 0)$  et  $(10, 1)$ .

## Applications aux ordres de grandeur

---

Le nombre de chiffres de l'écriture décimale d'un entier  $N \geq 1$  est  $\lfloor \log N \rfloor + 1$  (partie entière de  $\log N$  plus 1).

**Exemple.** Nombre de chiffres de  $2^{100}$  :  $\log(2^{100}) = 100 \log 2 \approx 30,10$ . Donc  $2^{100}$  a 31 chiffres.

L'échelle de Richter (séismes) et l'échelle de pH (chimie) sont des applications directes.