

# Dénombrement

## Chapitre 5

### Principes fondamentaux

---

**Propriété — Principe additif**

Si deux choix  $A$  et  $B$  s'excluent mutuellement, le nombre total de choix est  $\text{card}(A) + \text{card}(B)$ .

**Propriété — Principe multiplicatif**

Si une expérience se décompose en  $k$  étapes indépendantes offrant  $n_1, n_2, \dots, n_k$  possibilités, le nombre total est  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ .

### Permutations

---

**Définition**

Une **permutation** d'un ensemble à  $n$  éléments est une façon d'ordonner ses éléments. Leur nombre est :

$$n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1.$$

Par convention  $0! = 1$ .

### Arrangements

---

**Définition**

Un **arrangement** de  $p$  éléments parmi  $n$  est une suite ordonnée de  $p$  éléments distincts choisis parmi  $n$ . Leur nombre est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\dots(n-p+1).$$

## Combinaisons

### Définition

Une **combinaison** de  $p$  éléments parmi  $n$  est un sous-ensemble (non ordonné) à  $p$  éléments d'un ensemble à  $n$ . Leur nombre :

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

### Propriété — Propriétés

1.  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ .
2.  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$  (symétrie).
3.  $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$  (Pascal).

## Formule du binôme de Newton

### Théorème

Pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$  :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

**Exemple.**  $(x + 2)^4 = x^4 + 4 \times 2x^3 + 6 \times 4x^2 + 4 \times 8x + 16 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$ .