Suites numériques (avec applications financières)

Chapitre 4

Définition et modes de génération

Une **suite** réelle est une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, notée (u_n).

- **Mode explicite** : $u_n = f(n)$.
- **Mode récurrent** : $u_{n+1} = g(u_n)$ avec u_0 donné.

Monotonie, majoration, minoration

(u_n) est :

- **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n ;
- **majorée** par M si $u_n \leq M$ pour tout n ;
- **bornée** si majorée et minorée.

Suites arithmétiques

Définition
(u_n) est **arithmétique de raison r** si $u_{n+1} = u_n + r$. Alors $u_n = u_0 + nr$ et plus généralement $u_n = u_p + (n-p)r$.

Propriété — Somme

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Suites géométriques

Définition
(u_n) est **géométrique de raison q** si $u_{n+1} = qu_n$. Alors $u_n = u_0 q^n$.

Propriété — Somme
Si $q \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Applications financières

Définition — Intérêts simples
Un capital C_0 placé au **taux simple** t par période donne après n périodes : $C_n = C_0(1+nt)$. La suite (C_n) est **arithmétique**.

Définition — Intérêts composés
Un capital C_0 placé au **taux composé** t par période donne après n périodes : $C_n = C_0(1+t)^n$. La suite (C_n) est **géométrique** de raison $1+t$.

Exemple. $C_0 = 10000$ DH placé à 4% composé annuel. Après 5 ans : $C_5 = 10000 \times 1\{,\}04^5 \approx 12166\{,\}53$ DH.

Propriété — Valeur acquise d'une suite d'annuités
n versements constants a en fin de période, au taux t :

$$V_n = a(1+t)^{n-1} + a(1+t)^{n-2} + ... + a = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}.$$