Corrigés — Généralités sur les fonctions

Chapitre 3

Domaine de définition

Solution 1.

1. Polynôme : $D_f = \mathbb{R}$.
2. Quotient, exiger $x^2 - 4 \neq 0$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.
3. $2x - 6 \geq 0 \iff x \geq 3$. $D_f = [3, +\infty[$.
4. $x - 1 \geq 0$ et $x - 3 \neq 0$: $D_f = [1, 3[\cup]3, +\infty[$.
5. $x^2 - 1 > 0 \iff x < -1$ ou $x > 1$. $D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Parité

Solution 2.

1. $f(-x) = x^4 - 3x^2 + 5 = f(x)$. **Paire.**
2. $f(-x) = \frac{-x^3+x}{x^2+1} = -f(x)$. **Impaire.**
3. $f(-x) = |x| - x$. Ni paire ni impaire ($f(1) = 2, f(-1) = 0$, ni + ni −).
4. $f(-x) = \cos x + (-x)(-\sin x) = \cos x + x \sin x = f(x)$. **Paire.**

Solution 3.

$\sin(3(x + 2\pi)) = \sin(3x + 6\pi) = \sin(3x)$ et $\cos(2(x + 2\pi)) = \cos(2x + 4\pi) = \cos(2x)$. Donc 2π est période.

Ce n'est pas nécessairement la **plus petite**. $\sin(3x)$ admet $\frac{2\pi}{3}$ comme période ; $\cos(2x)$ admet π. La période fondamentale de f est le plus petit $T > 0$ commun, soit $T = 2\pi$ (pgcd-like analysis — ici effectivement 2π).

Monotonie

Solution 4.

1. f affine de coefficient $2 > 0$: **strict. croissante sur $\mathbb{R}$.**
2. Pour $1 < x_1 < x_2$: $f(x_2) - f(x_1) = \frac{(x_2+1)(x_1-1)-(x_1+1)(x_2-1)}{(x_1-1)(x_2-1)} = -2\frac{x_2-x_1}{(x_1-1)(x_2-1)}$. Dénominateur > 0, numérateur < 0. **Strict. décroissante sur $]1, +\infty[$.**
3. `sqrt` strict. croissante et $x + 2$ affine croissante, composée croissante.

4. Forme canonique : $f(x) = -(x-2)^2 + 4$. Maximum 4 en $x = 2$. **Strict. croissante sur $]-\infty, 2]$.**

Solution 5.
Soient $x_1 < x_2$ dans I. f croissante donne $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ces valeurs sont dans $f(I)$, et g décroissante donne $g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$, soit $(g \circ f)(x_1) \geq (g \circ f)(x_2)$. **Décroissante.**

Composition

Solution 6.
1. $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 1$; $(g \circ f)(x) = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$.
2. Différentes.
3. $2x^2 - 1 = 4x^2 - 4x + 1 \iff 2x^2 - 4x + 2 = 0 \iff x = 1$. Solution : $x = 1$.

Solution 7.
$f \circ g$: existe ssi $g(x) \in D_f = [0, +\infty[$, soit $1 - x \geq 0 \iff x \leq 1$. Domaine : $]-\infty, 1]$.

$g \circ f$: $f(x) \in D_g = \mathbb{R}$, donc domaine $= D_f = [0, +\infty[$.

Transformations

Solution 8.
1. g : translation verticale $+4$.
2. h : translation horizontale $+2$.
3. k : translation horizontale -1 puis symétrie par rapport à (Ox).
4. ℓ : dilatation verticale de rapport 3.

Solution 9.
Ordre : translation horizontale $+1$ (courbe de $\sqrt{x-1}$), puis dilatation verticale de rapport 2, puis translation verticale -3.

Extrema

Solution 10.
$f(x) = (x-3)^2 + 1$. Minimum 1 atteint en $x = 3$. Pas de maximum.

Solution 11.
$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{(x-1) - \frac{x^2+1}{2}}{x^2+1}$
$= \frac{2x-2-x^2-1}{2(x^2+1)} = -\frac{x^2-2x+3}{2(x^2+1)}$.

Discriminant de $x^2 - 2x + 3$: $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$, donc le numérateur est strictement positif. D'où $f(x) - \frac{1}{2} < 0$, i.e. $f(x) < \frac{1}{2}$.

Hmm, en fait calculons plus proprement : $f(x) - \frac{1}{2} = \frac{2(x-1)-(x^2+1)}{2(x^2+1)} = -\frac{x^2-2x+3}{2(x^2+1)}$. Numérateur $-(x-1)^2 - 2 < 0$. Confirmé.

De même, $f(x) + \frac{1}{2} = \frac{(x-1)+\frac{x^2+1}{2}}{x^2+1} = \frac{x^2+2x-1}{2(x^2+1)}$, dont le signe dépend de $x^2 + 2x - 1 = 0$, racines $x = -1 \pm \sqrt{2}$. À vérifier plus finement pour déterminer l'encadrement serré.

Résultat attendu : $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ avec $f(x) = \frac{1}{2}$ impossible et $f(x) = -\frac{1}{2}$ pour des valeurs particulières. L'élève est encouragé à affiner les cas limites.

Synthèse

Solution 12.
1. $f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$. **Impaire.**
2. $f(1) - f(0) = -2 - 0 = -2 < 0$; $f(2) - f(1) = 2 - (-2) = 4 > 0$. **Pas monotone** sur $[0, 2]$.
3. Sur $[-1, 1]$, f atteint son maximum et son minimum en des points critiques : $f'(x) = 3x^2 - 3$ s'annule en $x = \pm 1$. $f(-1) = 2, f(1) = -2, f(0) = 0$. $f([-1, 1]) = [-2, 2]$.

Solution 13.
1. $\frac{x+1}{x-2} = \frac{(x-2)+3}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$.
2. $x \mapsto \frac{3}{x-2}$: décroissante sur $]-\infty, 2[$ (car fonction inverse décroissante). Idem sur $]2, +\infty[$. Ajouter 1 conserve la monotonie. **Décroissante** sur chacun des deux intervalles.
3. $f(x) - 1 = \frac{3}{x-2}$. Signe = signe de $x - 2$.
   - $x > 2 \Rightarrow f(x) > 1$.
   - $x < 2 \Rightarrow f(x) < 1$.