

Équations, inéquations, programmation linéaire

Chapitre 2

Équations et inéquations du second degré

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta > 0$: deux racines $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$: une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$: pas de racine réelle.

Propriété — Signe du trinôme

- Si $\Delta > 0$: le trinôme est du **signe de a** à l'extérieur des racines, du **signe opposé** entre.
- Si $\Delta \leq 0$: le trinôme garde le **signe de a** sur \mathbb{R} .

Systemes linéaires

Définition

Un système linéaire 2×2 s'écrit :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Si $ab' - a'b \neq 0$: solution unique (règle de Cramer).

Pour 3×3 on résout par substitution, combinaison ou pivot.

Exemple. $2x + 3y = 7$, $x - y = 1$. De la 2e : $x = 1 + y$. Dans la 1re : $2(1 + y) + 3y = 7$, donc $y = 1$, $x = 2$.

Inéquations et programmation linéaire 2D

On s'intéresse à **maximiser** ou **minimiser** une fonction objectif linéaire sous des contraintes linéaires.

Propriété — Méthode graphique

1. Tracer les droites frontières de chaque contrainte.

2. Hachurer le demi-plan exclu par chaque inéquation.
3. La zone non hachurée est l'**ensemble des solutions admissibles**.
4. L'optimum de $Z = \alpha x + \beta y$ est atteint **en un sommet** du polygone des solutions.

Exemple. Un atelier produit x unités A et y unités B. Contraintes : $x + 2y \leq 40$ (matière), $3x + y \leq 60$ (main d'œuvre), $x \geq 0$, $y \geq 0$. Maximiser $Z = 10x + 15y$. Les sommets sont $(0, 0)$, $(20, 0)$, $(16, 12)$, $(0, 20)$. $Z(16, 12) = 160 + 180 = 340$, $Z(0, 20) = 300$, $Z(20, 0) = 200$. **Optimum** : $(16, 12)$, $Z = 340$.