Corrigés — Géométrie analytique de l'espace

Chapitre 12

Solution 1.

1. $3(x-1)-(y-2)+2(z+1)=0 \iff 3x-y+2z+1=0$.
2. $x+y+z=0$.
3. $\overrightarrow{AB}(-2;2;1)$, $\overrightarrow{AC}(-1;-1;2)$. Normale $\vec{n}(a;b;c)$: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. $-2a+2b+c=0$ et $-a-b+2c=0$. En posant $c=2$: $-2a+2b+2=0$ et $-a-b+4=0$. D'où $b=a-1$ et $a+(a-1)=4$, soit $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=2$. Multiplier par 2 : $(5;3;4)$. Plan : $5(x-2)+3(y-1)+4z=0$, soit $5x+3y+4z=13$.

Solution 2.

1. $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}$.
2. $\overrightarrow{AB}(3;-4;4)$. $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=3-4t \\ z=4t \end{cases}$.

Solution 3.

1. Directeurs $(1;2;3)$ et $(1;2;3)$: identiques. Vérifier si confondues : $A(0;0;0)\in D_2$? $(0,0,0)=(1+s,2+2s,3+3s)$ donne $s=-1,-1,-1$. Cohérent. Confondues.
2. Injecter : $(t)+(-t)+2=3 \iff 2=3$. Impossible. **Parallèles** (disjointes).

Solution 4.

1. $d=|1+2+3\frac{|}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.
2. $d=|-6\frac{|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{6}{3}=2$.

Solution 5.

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. $(5;-2;3)$: $(4)^2+0+0=16$ ✓. **Oui**.

Solution 6.

$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1+(z-3)^2-9+5=0, \quad \text{soit} \quad (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9.$
Sphère : centre $(2;-1;3)$, rayon 3.

Solution 7.

1. Normale $\vec{n}(bc;ac;ab)$ avec $a=1, b=2, c=3$: $(6;3;2)$. Plan : $6(x-1)+3y+2z=0$, soit $6x+3y+2z=6$.
2. $d(O,P)=|-6\frac{|}{\sqrt{36+9+4}}=\frac{6}{7}$.

Solution 8.

1. Normaux $(2; 1; -1)$ et $(1; -1; 3)$: non colinéaires (ex. $2 \neq -1$). Sécants.
2. Poser $z = t$: $2x + y = 4 + t$ et $x - y = 1 - 3t$. Sommer : $3x = 5 - 2t$, $x = \frac{5-2t}{3}$. Puis $y = x - 1 + 3t = \frac{2+7t}{3}$. Paramétrique : $\begin{cases} x = \frac{5-2t}{3} \\ y = \frac{2+7t}{3} \\ z = t \end{cases}$.

Solution 9.

Projeté $H = B + s\vec{u}$ avec $s = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$. $\overrightarrow{BA}(3; 1; 2)$, $\vec{u}(1; 0; 1)$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = 2$. $s = \frac{3+0+2}{2} = \frac{5}{2}$. $H = \left(\frac{5}{2}; 0; \frac{5}{2}\right)$. $\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{1}{2}; -1; \frac{1}{2}\right)$. $AH = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.