Géométrie analytique de l'espace

Chapitre 12

Équation d'un plan

Théorème — Équation cartésienne d'un plan
Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, tout plan a une équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Le vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ est un *vecteur normal* au plan. Réciproquement, toute équation de cette forme représente un plan.

Exemple. Le plan passant par $A(1; 0; 2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2; -1; 3)$ a pour équation : $2(x-1) - (y-0) + 3(z-2) = 0$, soit $2x - y + 3z - 8 = 0$.

Plan déterminé par trois points non alignés

Étant donnés A, B, C non alignés, on prend un vecteur normal $\vec{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (en 2e Bac, produit vectoriel ; en 1BAC SE, on résout un système $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$).

Plan déterminé par un point et deux vecteurs

Le plan contenant A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}, \vec{v}$ a pour *représentation paramétrique* :

$$M(x; y; z) \in (P) \iff \overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Équation d'une droite

Théorème — Représentation paramétrique de droite
Soit (D) la droite passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$. Alors :

$$M \in (D) \iff \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \quad \text{pour un } t \in \mathbb{R}.$$

Une droite dans l'espace est aussi l'intersection de deux plans sécants — elle peut donc se donner par un système de deux équations cartésiennes.

Exemple. Droite passant par $A(1;-1;2)$ et dirigée par $\vec{u}(2;0;1)$: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1 \\ z=2+t \end{cases}$.

Positions relatives

Deux droites

- **Parallèles** (même direction) : $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ colinéaires.
- **Sécantes** : non parallèles, et il existe un point commun.
- **Non coplanaires** (« gauches ») : non parallèles, pas de point commun.

Exemple. $D_1 : \begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=2t \end{cases}$ et $D_2 : \begin{cases} x=2+2s \\ y=-2s \\ z=4s \end{cases}$. Directeurs $(1;-1;2)$ et $(2;-2;4) = 2 \times (1;-1;2)$. **Parallèles.**

Droite et plan

Injecter les paramétriques de la droite dans l'équation du plan :
- équation sans solution : parallèles ;
- toutes les valeurs de t solutions : droite incluse dans le plan ;
- solution unique : point d'intersection.

Deux plans

- Parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
- Sécants selon une droite sinon.

Distances

Distance point–plan

Théorème
Soit $(P) : ax + by + cz + d = 0$ et $M(x_0; y_0; z_0)$. Dans un repère orthonormé :

$$d(M,(P)) = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d\frac{|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Distance point–droite

Projeter orthogonalement le point sur la droite, calculer la norme du vecteur résidu. Formule plus compacte via produit vectoriel en 2BAC.

Équation d'une sphère

Théorème
La sphère de centre Ω de coordonnées $(a; b; c)$ et de rayon r a pour équation :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

Le développement donne une forme générale $x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ qui est celle d'une sphère ssi $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \delta > 0$ (via forme canonique).