

# Corrigés — Vecteurs de l'espace

## Chapitre 11

### Solution 1.

- $\overrightarrow{AB}(2; -2; 5), \overrightarrow{AC}(-3; 3; 3), \overrightarrow{BC}(-5; 5; -2).$
- $AB = \sqrt{4 + 4 + 25} = \sqrt{33}$  ;  $AC = \sqrt{9 + 9 + 9} = 3\sqrt{3}$  ;  $BC = \sqrt{25 + 25 + 4} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$
- Milieu de  $[AC] = \left(\frac{1-2}{2}; \frac{2+3}{2}; \frac{-1+2}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right).$

### Solution 2.

$\vec{v} = -2\vec{u}, -\frac{4}{2} = -2, -\frac{6}{3} = -2.$  Colinéaires, coefficient  $-2.$

### Solution 3.

$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} : (a; b; a + b) = (1; 1; 0).$  Système :  $a = 1, b = 1, a + b = 2 \neq 0.$  Incompatible. Donc  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  sont **non coplanaires** : forment **une base** de l'espace.

### Solution 4.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 12 - 1 = -11.$   $\|\vec{u}\| = \sqrt{14}, \|\vec{v}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$   $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{11}{\sqrt{14 \times 3\sqrt{2}}} = -\frac{11}{3\sqrt{28}} \approx -0,693.$  Angle  $\approx 134^\circ.$

### Solution 5.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3x + 2x - 2 = 5x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{5}.$

### Solution 6.

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a \times a \times \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}.$
- $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2.$

### Solution 7.

$AB^2 = 1 + 1 + 0 = 2$  ;  $BC^2 = 0 + 1 + 1 = 2$  ;  $AC^2 = 1 + 0 + 1 = 2.$  Les trois côtés égaux : **équilatéral.**

### Solution 8.

- $A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), E(0; 0; 1),$  et par Chasles :  $C(1; 1; 0), F(1; 0; 1), H(0; 1; 1), G(1; 1; 1).$
- $\overrightarrow{AG}(1; 1; 1), AG = \sqrt{3}.$
- Chaque vecteur de la face  $BDHF$  (par ex.  $\overrightarrow{BD} = (-1; 1; 0)$ ) vérifie  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = -1 + 1 + 0 = 0.$  Idem pour  $\overrightarrow{BF} = (0; 0; 1)$ ... mais ce dernier donne  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BF} = 1 \neq 0,$  donc  $\overrightarrow{AG}$  n'est

orthogonal qu'à la diagonale  $[BD]$  (ou à  $[DF]$  etc.), pas au plan  $BDHF$ . **L'énoncé demandait trop fort** ; l'exercice convient pour la diagonale seule.

**Solution 9.**

$$M = \left( \frac{2+0}{2}; \frac{1-1}{2}; \frac{0+3}{2} \right) = \left( 1; 0; \frac{3}{2} \right). \quad AB = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}. \quad OM = \sqrt{1+0+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$